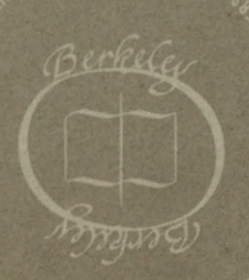




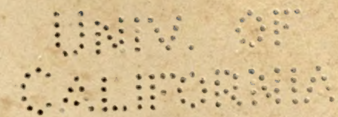






Abhandlungen

zur



Methode der kleinsten Quadrate

von

Carl Friedrich Gauss.

In deutscher Sprache herausgegeben

von

Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon,
Assistenten im Königl. Preussischen Geodätischen Institut.

Berlin, 1887.
Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei, Beuthstr. 5.

Vorwort.

Die Herausgeber dieses Sammelwerkchens haben mich als denjenigen, auf dessen Anregung hin sie den Entschluss zu dem Unternehmen fassten, um einige einleitende Worte ersucht. Ich entspreche diesem Wunsche gern, da ich mit dem Erscheinen der vorliegenden Zusammenstellung von Gauss' Schriften über die Methode der kleinsten Quadrate einen seit Jahren gehegten Wunsch erfüllt sehe, den Wunsch: es möge in deutscher Sprache etwas Aehnliches geschaffen werden, wie es schon vor 31 Jahren J. Bertrand seinen Landsleuten durch eine französische Ausgabe der zum grössten Theil lateinisch geschriebenen grundlegenden Arbeiten von Gauss geboten hatte. Der gleiche Wunsch hat sich ohne Zweifel bei vielen und besonders bei denjenigen unserer Landsleute geregt, die sich der Bertrand-schen Sammlung bedienten, weil ihnen der Zugang zu den betreffenden Gauss'schen Originalarbeiten — selbst nach der Herausgabe von Gauss' gesammelten Werken durch die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen — wenig bequem war.

Seitdem Gauss im ersten Viertel dieses Jahrhunderts seine Darstellungen der Methode der kleinsten Quadrate veröffentlichte, ist allerdings eine umfangreiche Literatur über dieselbe entstanden, unter der sich keine geringe Menge von Lehrbüchern befindet. Es ist aber dennoch jedem, der zu klaren Begriffen gelangen will — auch wenn er nicht die Absicht hat, den ganzen Reichthum der Theorie kennen

zu lernen, sondern nur die Anwendung ins Auge fasst — zu rathen, GAUSS' Schriften nicht unstudiert zu lassen. Selbst bei nicht vollem Verständniss der schwierigeren Stellen wird dies von grossem Nutzen sein.

Um aber das Verständniss der Theorie an der Hand von Beispielen zu erleichtern, ist in die Sammlung, welche sich übrigens in Auswahl und Reihenfolge der Schriften der von BERTRAND veranstalteten anschliesst, noch die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona aufgenommen worden, eine Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, die in jeder Zeile den Meister erblicken lässt.

Ausserdem sind noch mehrere Selbstanzeigen, insbesondere diejenigen der beiden Theile der „Theoria Combinationis" und des „Supplementum" angeschlossen, indem sie mit dazu dienen, über den GAUSS'schen Ideengang aufzuklären.

Wie bei BERTRAND ist auch hier die Uebersetzung der „Theoria Combinationis" an die Spitze gestellt, weil GAUSS die daselbst gegebene Begründung der Methode der kleinsten Quadrate der älteren in der „Theoria motus corp. coelest." gegebenen vorzog. Wir besitzen hierüber drei Zeugnisse, erstens in einem Briefe an ENCKE vom 23. August 1831*), zweitens in einem solchen an BESSEL vom 28. Februar 1839**) und drittens in einem Briefe an SCHUMACHER vom 25. November 1844***). Das von GAUSS an den genannten Orten Gesagte ist jedoch für den Gegenstand, wie er selbst hervorhebt, keineswegs erschöpfend, weshalb ich mich

---

*) *Johann Franz Encke*, Königl. Astronom u. Direktor der Sternwarte zu Berlin. Sein Leben und Wirken. Bearbeitet von seinem dankbaren Schüler Dr. *C. Bruhns*. Leipzig, 1869, S. 237 und 238.

**) Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel*. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Leipzig, 1880, S. 523.

***) Briefwechsel zwischen *C. F. Gauss* und *H. C. Schumacher*. Herausgegeben von *C. A. F. Peters*. IV. Band. Altona, 1862, S. 371.

mit dem Hinweis auf die Quellen begnüge. Ohne Frage empfiehlt sich die „Theoria Combinationis“ durch die grosse Einfachheit der Entwickelung aus dem leicht verständlichen Princip, das mittlere zu befürchtende Fehlerquadrat der gesuchten Grössen (welches konsequent als der Durchschnittsbetrag des wahren Fehlerquadrats für unendlich viele gleichartige Fälle gebildet wird) zu einem Minimum zu machen. Gleichwohl dürfte niemand, dem die Umstände es gestatten, unterlassen, sich weiter umzuschauen und namentlich die ältere Gauss'sche Darstellungsweise auch kennen zu lernen, um so mehr als Gauss selbst, indem er nach dem oben erwähnten Briefe an Schumacher bei seinen Vorträgen auf einleitende praktische Beispiele immer zunächst die ältere Entwickelung und dann erst die Theoria Combinationis folgen liess, die erstere für sehr geeignet gehalten zu haben scheint, die Bedeutung der letzteren ins rechte Licht zu stellen.

Zum Schlusse darf nicht unerwähnt bleiben, dass sich die Herausgeber dieses Buches vergewissert haben, keinerlei ältere Autor- und Verlagsrechte zu verletzen. Namentlich hatte der um die Herausgabe von Gauss' Werken so verdiente Herr Prof. Schering die Güte, dieses in Bezug auf die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen festzustellen. Das Interesse, welches er sowohl wie mehrere andere hervorragende Sachkenner dem Unternehmen entgegenbrachten, hat sehr dazu beigetragen, die Herausgeber mit Hingebung an ihre zweifellos verantwortliche Arbeit zu erfüllen.

Berlin, Königl. Geodätisches Institut, Januar 1887.

Helmert.

Inhalts-Verzeichniss.

Berichtigungen.

S. 5, Zeile 2 v. u. Statt Wahrscheinlickeiten ist zu setzen: Wahrscheinlichkeit

S. 144, Zeile 8 v. u. Statt n' ist zu setzen: $\log n'$.

I.

Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

Erster Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen überreicht 1821, Februar 15.)

1.

Beobachtungen, welche sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, werden immer, so sorgfältig man auch verfahren mag, grösseren oder kleineren Fehlern unterworfen bleiben. Die Fehler der Beobachtungen sind im allgemeinen nicht einfache, sondern entspringen gleichzeitig mehreren Quellen, bei denen zwei Arten genau unterschieden werden müssen. Gewisse Fehlerursachen sind nämlich so beschaffen, dass ihr Einfluss auf jede Beobachtung von veränderlichen Umständen abhängt, die unter sich und mit der Beobachtung selbst in keinem wesentlichen Zusammenhang stehen; die so entstehenden Fehler werden unregelmässige oder zufällige genannt; und insoweit jene Umstände der Rechnung nicht unterworfen werden können, gilt dieses auch von den Fehlern selbst. Dahin gehören die von der Unvollkommenheit unserer Sinne herrührenden Fehler und solche, die von unregelmässigen äusseren Ursachen abhängen, z. B. von der durch das Wallen der Luft bewirkten Unsicherheit beim Sehen; auch rechnen wir hierher manche, selbst den besten Instrumenten anhaftende Unvollkommenheiten, z. B. Ungleichförmigkeiten der inneren Wandungen der Libellen, Mangel an absoluter Festigkeit u. s. w. Dagegen haben andere Fehlerursachen bei sämmtlichen Beobachtungen derselben Art ihrer Natur nach entweder einen vollkommen constanten Einfluss, oder doch einen solchen, dessen Grösse in gesetz-

mässig bestimmter Weise allein von Umständen abhängt, welche mit der Beobachtung wesentlich verknüpft sind. Fehler dieser Art werden constante oder regelmässige genannt.

Uebrigens ist es klar, dass diese Unterscheidung gewissermaassen nur relativ ist und von dem weiteren oder engeren Sinne abhängt, in welchem man den Begriff von Beobachtungen derselben Art fassen will. So bringen z. B. unregelmässige Fehler der Theilung der Instrumente bei Winkelmessungen einen constanten Fehler hervor, wenn es sich nur um eine beliebig oft zu wiederholende Beobachtung desselben Winkels handelt, und wenn dabei immer dieselben fehlerhaften Theilstriche benutzt werden; während der aus derselben Quelle stammende Fehler als ein zufälliger angesehen werden kann, wenn man irgendwie Winkel von beliebiger Grösse zu messen hat, und eine Tafel, die für jeden Theilstrich den zugehörigen Fehler angiebt, nicht zu Gebote steht.

2.

Die Betrachtung der regelmässigen Fehler soll von unseren Untersuchungen ausdrücklich ausgeschlossen bleiben. Es ist nämlich Sache des Beobachters, alle Ursachen, welche constante Fehler hervorzubringen vermögen, sorgfältig aufzusuchen und dieselben entweder abzustellen, oder wenigstens ihrer Wirkung und Grösse nach auf das genaueste zu erforschen, um ihren Einfluss auf jede einzelne Beobachtung bestimmen und diese von jenem befreien zu können, so dass ein Ergebniss erzielt wird, als ob der Fehler überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre. Ganz verschieden hiervon ist aber das Wesen der unregelmässigen Fehler, welche ihrer Natur nach der Rechnung nicht unterworfen werden können. Diese wird man daher in den Beobachtungen zwar dulden, ihren Einfluss aber auf die aus den Beobachtungen abzuleitenden Grössen durch eine geschickte Combination der ersteren möglichst abschwächen müssen. Dieser wichtigen Aufgabe ist die folgende Untersuchung gewidmet.

3.

Die Fehler in den Beobachtungen gleicher Art, welche einer bestimmten einfachen Ursache entspringen, sind der Natur der Sache nach in bestimmte *Grenzen* eingeschlossen, welche man zweifelsohne genau angeben könnte, wenn die Natur dieser Ursache selbst *vollständig* erkannt wäre. Die meisten Ursachen zufälliger Fehler

sind so beschaffen, dass nach dem Gesetz der Stetigkeit alle zwischen jenen Grenzen enthaltenen Fehler für möglich gehalten werden müssen, und dass die vollständige Erkenntniss einer solchen Ursache zugleich lehren würde, ob alle diese Fehler mit gleicher oder ungleicher Leichtigkeit begangen werden können, und, in letzterem Falle, eine wie grosse relative Wahrscheinlichkeit jedem Fehler beizulegen sei. Dasselbe gilt auch in Bezug auf den totalen Fehler, der sich aus mehreren einfachen Fehlern zusammensetzt, dass er nämlich zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sein wird (von denen die eine der Summe aller oberen, die andere der Summe aller unteren Theilgrenzen gleich ist); alle Fehler zwischen diesen Grenzen werden zwar möglich sein, da sich indess jeder auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Zusammensetzung der Theilfehler, welche selbst wieder mehr oder weniger wahrscheinlich sind, ergeben kann, so werden wir für den einen eine grössere, für den andern eine geringere Häufigkeit annehmen müssen, und es könnte unter der Voraussetzung, dass man die Gesetze der einfachen Fehler kennt, ein Gesetz der relativen Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden, abgesehen von den analytischen Schwierigkeiten beim Zusammenfassen aller Combinationen.

Freilich giebt es auch gewisse Fehlerursachen, welche nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende, sondern nur unstetige Fehler hervorbringen können, wie z. B. die Theilungsfehler der Instrumente (wenn man diese überhaupt zu den zufälligen Fehlern rechnen will); denn die Anzahl der Theilstriche an jedem bestimmten Instrument ist endlich. Dessen ungeachtet wird aber offenbar, wenn nur nicht alle Fehlerursachen unstetige Fehler erzeugen, die Gesammtheit aller möglichen Totalfehler eine nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende Reihe bilden, oder auch mehrere derartige getrennte Reihen, wenn es sich nämlich bei Anordnung aller möglichen unstetigen Fehler nach ihrer Grösse ergeben sollte, dass zufällig eine oder die andere Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern dieser Reihe grösser ist, als die Differenz zwischen den Grenzen derjenigen Totalfehler, welche den stetigen Fehlern allein entstammen. In der Praxis wird aber der letztere Fall kaum jemals eintreten, wenn nicht etwa die Theilung an groben Fehlern leidet.

4.

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ die relative Häufigkeit des Totalfehlers x bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen, so

1*

wird wegen der Stetigkeit der Fehler die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den unendlich nahen Grenzen x und $x + dx$ liegenden Fehlers $= \varphi(x)\,dx$ zu setzen sein. Es wird in der Praxis wohl immer so gut wie unmöglich sein, diese Funktion a priori anzugeben; nichtsdestoweniger lassen sich mehrere allgemeine Eigenschaften derselben feststellen, welche hier folgen sollen. Offenbar ist die Funktion $\varphi(x)$ insofern zu den unstetigen Funktionen zu rechnen, als sie für alle Werthe des x, welche ausserhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegen, $= 0$ sein muss; innerhalb dieser Grenzen wird sie aber überall einen positiven Werth annehmen (abgesehen von dem Fall, über den wir am Ende des vorigen Art. gesprochen haben). In den meisten Fällen wird man positive und negative Fehler von derselben Grösse als gleich häufig voraussetzen dürfen, so dass $\varphi(-x) = \varphi(x)$ sein wird. Da ferner kleinere Fehler leichter als grössere begangen werden, so wird im allgemeinen $\varphi(x)$ für $x = 0$ seinen grössten Werth erhalten und beständig abnehmen, wenn x wächst.

Allgemein giebt aber der Werth des von $x = a$ bis $x = b$ genommenen Integrals $\int\varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass irgend ein noch unbekannter Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt. Der Werth dieses Integrals von der unteren Grenze aller möglichen Fehler bis zu ihrer oberen Grenze wird daher immer $= 1$ sein. Und da $\varphi(x)$ für alle ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werthe des x immer $= 0$ ist, so ist offenbar auch

der Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int\varphi(x)dx$ immer $= 1$.

5.

Wir betrachten ferner das Integral $\int x\,\varphi(x)\,dx$ zwischen denselben Grenzen, und setzen seinen Werth $= k$. Sind alle einfachen Fehlerursachen nun so beschaffen, dass kein Anlass vorhanden ist, zwei gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Fehlern verschiedene Häufigkeit beizulegen, so wird dasselbe auch für den totalen Fehler gelten, es ist also $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und deshalb nothwendig $k = 0$. Wir schliessen hieraus, dass, jedesmal wenn k nicht verschwindet, sondern etwa eine positive Grösse ist, nothwendig eine oder die andere Fehlerursache vorhanden sein müsse, welche entweder nur positive Fehler, oder wenigstens häufiger positive als negative zu erzeugen vermöge. Diese Grösse k, welche

in der That das Mittel aller möglichen Fehler oder der mittlere Werth der Grösse x ist, kann passend der constante Theil des Fehlers genannt werden. Uebrigens ist leicht zu beweisen, dass der constante Theil des totalen Fehlers gleich der Summe der constanten Theile derjenigen Fehler ist, welche aus den einzelnen einfachen Ursachen hervorgehen. Setzt man jetzt die Grösse k als bekannt voraus, subtrahirt dieselbe von jeder Beobachtung und bezeichnet den Fehler der so verbesserten Beobachtung mit x', die entsprechende Wahrscheinlichkeit aber mit $\varphi'(x')$, so wird $x' = x - k$, $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und folglich

$$\int x' \varphi'(x') dx' = \int x \varphi(x) dx - \int k \varphi(x) dx = k - k = 0,$$

d. h. die Fehler der verbesserten Beobachtungen werden keinen constanten Theil haben, was auch an sich klar ist.

6.

Wie das Integral $\int x \varphi(x) dx$, oder der mittlere Werth von x, das Fehlen oder Vorhandensein und die Grösse eines constanten Fehlers anzeigt, ebenso erscheint das von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausgedehnte Integral

$$\int x^2 \varphi(x) dx$$

(oder der mittlere Werth des Quadrates x^2) am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definiren und zu messen, so dass bei zwei Beobachtungsgruppen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenigen Beobachtungen für die genaueren zu halten sind, für welche das Integral $\int x^2 \varphi(x) dx$ den kleineren Werth erhält. Wenn nun jemand einwenden würde, diese Festsetzung sei ohne zwingende Nothwendigkeit willkürlich getroffen, so stimmen wir gern zu. Enthält doch diese Frage der Natur der Sache nach etwas Unbestimmtes, welches nur durch ein in gewisser Hinsicht willkürliches Princip bestimmt begrenzt werden kann. Die Bestimmung einer Grösse durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht. Das Risiko eines solchen Spieles wird nach dem wahrscheinlichen Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlickeiten. Welchem Verluste man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an

-lichkeiten

sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Theil von unserem Ermessen ab. Den Verlust dem Fehler selbst gleichzusetzen, ist offenbar nicht erlaubt; würden nämlich positive Fehler wie Verluste behandelt, so müssten negative als Gewinne gelten. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, die ihrer Natur nach immer positiv ist. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen scheint die einfachste, welche diese Eigenschaft besitzt, vor den übrigen den Vorzug zu verdienen, und diese ist unstreitig das Quadrat. Somit ergiebt sich das oben aufgestellte Princip.

Laplace hat die Sache zwar auf eine ähnliche Weise betrachtet, er hat aber den immer positiv genommenen Fehler selbst als Maass des Verlustes gewählt. Wenn wir jedoch nicht irren, so ist diese Festsetzung sicherlich nicht weniger willkürlich, als die unsrige: ob nämlich der doppelte Fehler für ebenso erträglich zu halten ist, wie der einfache, zweimal wiederholte, oder für schlimmer, und ob es daher angemessener ist, dem doppelten Fehler nur das doppelte Moment, oder ein grösseres beizulegen, ist eine Frage, die weder an sich klar, noch durch mathematische Beweise zu entscheiden, sondern allein dem freien Ermessen zu überlassen ist. Ausserdem kann man nicht leugnen, dass die in Rede stehende Festsetzung gegen die Stetigkeit verstösst: und gerade deshalb widerstrebt dieses Verfahren in höherem Grade der analytischen Behandlung, während die Resultate, zu welchen unser Princip führt, sich sowohl durch Einfachheit als auch durch Allgemeinheit ganz besonders auszeichnen.

7.

Wir setzen den Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int x^2 \varphi(x)\, dx = m^2$, und nennen die Grösse m *den mittleren zu befürchtenden Fehler*, oder einfach *den mittleren Fehler* der Beobachtungen, deren unbestimmte Fehler x die relative Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ haben. Jene Bezeichnung werden wir nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränken, sondern auch auf alle aus Beobachtungen abgeleiteten Bestimmungen ausdehnen. Man muss sich indess sehr wohl davor hüten, den mittleren Fehler mit dem arithmetischen Mittel aller Fehler, von welchem im Art. 5. die Rede war, zu verwechseln.

Wo mehrere Gattungen von Beobachtungen oder mehrere aus Beobachtungen erhaltene Bestimmungen, denen nicht dieselbe Ge-

nauigkeit zukommt, zu vergleichen sind, verstehen wir unter dem relativen *Gewicht* derselben eine Grösse, die dem m^2 umgekehrt proportional ist, während die *Genauigkeit* einfach dem m umgekehrt proportional genommen wird. Um demnach das Gewicht durch eine Zahl ausdrücken zu können, muss man das Gewicht einer gewissen Gattung von Beobachtungen als Einheit annehmen.

8.

Enthalten die Beobachtungsfehler einen constanten Theil, so wird durch seine Elimination der mittlere Fehler verringert, das Gewicht und die Genauigkeit vermehrt. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Art. 5. erhält man, wenn m' den mittleren Fehler der verbesserten Beobachtungen bedeutet,

$$m'^2 = \int x'^2 \varphi'(x')\, dx' = \int (x-k)^2 \varphi(x)\, dx = \int x^2 \varphi(x)\, dx$$
$$-2k\int x\, \varphi(x)\, dx + k^2 \int \varphi(x)\, dx = m^2 - 2k^2 + k^2 = m^2 - k^2.$$

Wenn man aber an Stelle des wahren constanten Theiles k eine andere Grösse l von den Beobachtungen abgezogen hätte, so würde das Quadrat des neuen mittleren Fehlers $= m^2 - 2kl + l^2$ $= m'^2 + (l-k)^2$ werden.

9.

Bezeichnet man mit λ einen bestimmten Coefficienten und mit μ den Werth des Integrals $\int \varphi(x)\, dx$ von $x = -\lambda m$ bis $x = +\lambda m$, so wird μ die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass der Fehler irgend einer Beobachtung (dem absoluten Werthe nach) kleiner als λm sei, dagegen $1 - \mu$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler grösser als λm sei. Wenn also der Werth $\mu = \frac{1}{2}$ dem Werth $\lambda m = \varrho$ entspricht, so wird der Fehler ebenso leicht unterhalb ϱ als oberhalb ϱ liegen können, so dass ϱ passend der *wahrscheinliche* Fehler genannt werden kann. Die Beziehung zwischen den Grössen λ und μ hängt offenbar von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ ab, welche im allgemeinen unbekannt ist. Es wird deshalb die Mühe lohnen, jene Beziehung für einige besondere Fälle näher zu betrachten.

I. Sind die Grenzen aller möglichen Fehler $-a$ und $+a$, und sind alle Fehler in diesen Grenzen gleich wahrscheinlich, so wird $\varphi(x)$ in den Grenzen $x = -a$ und $x = +a$ constant und folglich $= \frac{1}{2a}$ sein. Hieraus ergiebt sich $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, so lange λ nicht grösser als $\sqrt{3}$ ist; endlich wird $\varrho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\, m$,

und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler nicht grösser als der mittlere Fehler werde, $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Sind die Grenzen der möglichen Fehler, wie vorher, $-a$ und $+a$, und nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeit dieser Fehler vom Fehler 0 ab nach beiden Seiten in arithmetischer Progression abnehme, so wird

$$\varphi(x) = \frac{a-x}{a^2}, \text{ für die Werthe von } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } +a,$$

$$\varphi(x) = \frac{a+x}{a^2}, \text{ für die Werthe von } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } -a,$$

sein. Es folgt hieraus $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda^2$, so lange λ zwischen 0 und $\sqrt{6}$ liegt, und endlich $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{6 - 6\mu}$, so lange μ zwischen 0 und 1 liegt, und hieraus

$$\varrho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\, m.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines den mittleren nicht übersteigenden Fehlers wird in diesem Falle

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0{,}6498299.$$

III. Nehmen wir die Funktion $\varphi(x)$ proportional zu $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ (was zwar in der Wirklichkeit nur sehr nahe richtig sein kann), so wird

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}}$$

sein müssen, wobei π den halben Kreisumfang für den Radius 1 bezeichnet, woraus wir ferner ableiten

$$m = h\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(Siehe: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc., art. 28.). Bezeichnet man ferner den Werth des von $z = 0$ an genommenen Integrals

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-z^2}dz$$

mit $\Theta(z)$, so wird

$$\mu = \Theta\left(\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Die folgende Tafel giebt einige Werthe dieser Grösse:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Obgleich die Beziehung zwischen λ und μ von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ abhängt, so kann man doch einige allgemeine Eigenschaften derselben feststellen. Wie nämlich diese Funktion auch beschaffen sei, so wird sicher, wenn sie nur die Eigenschaft hat, dass ihr Werth bei wachsendem absoluten Werthe von x immer abnimmt oder wenigstens nicht wächst,

λ kleiner oder wenigstens nicht grösser als $\mu\sqrt{3}$ sein, wenn μ kleiner als $\frac{2}{3}$,

λ nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$ sein, wenn μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist.

Für $\mu = \frac{2}{3}$ fallen beide Grenzen zusammen, und λ kann alsdann nicht grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ sein.

Um diesen merkwürdigen Lehrsatz zu beweisen, bezeichnen wir mit y den Werth des von $z = -x$ bis $z = +x$ genommenen Integrals $\int \varphi(z)\,dz$; y wird alsdann die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass irgend ein Fehler in den Grenzen $-x$ und $+x$ enthalten ist. Ferner setzen wir

$$x = \psi(y), \qquad d\,\psi(y) = \psi'(y)\,dy, \qquad d\psi'(y) = \psi''(y)\,dy.$$

Es wird demnach $\psi(0) = 0$ sein, und

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)},$$

woraus mit Rücksicht auf die Voraussetzung folgt, dass $\psi'(y)$ von $y = 0$ bis $y = 1$ beständig wächst oder wenigstens nirgends ab-

nimmt; oder, was dasselbe ist, dass der Werth von $\psi''(y)$ immer positiv oder wenigstens nicht negativ ist. Ferner haben wir $d(y\,\psi'(y)) = \psi'(y)\,dy + y\,\psi''(y)\,dy$, und folglich

$$y\,\psi'(y) - \psi(y) = \int y\,\psi''(y)\,dy\,,$$

wenn man die Integration mit $y = 0$ beginnen lässt. Der Werth des Ausdrucks $y\,\psi'(y) - \psi(y)$ wird deshalb immer eine positive oder wenigstens keine negative Grösse, und folglich

$$1 - \frac{\psi(y)}{y\,\psi'(y)}$$

eine positive Grösse kleiner als 1 sein. Es sei f ihr Werth für $y = \mu$, also es sei, da man $\psi(\mu) = \lambda m$ hat,

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\,\psi'(\mu)} \quad \text{oder} \quad \psi'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}\,.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir folgende Funktion des y

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu}(y - \mu f)\,,$$

welche wir $= \mathrm{F}(y)$ setzen, wobei $d\,\mathrm{F}(y) = \mathrm{F}'(y)\,dy$. Offenbar wird dann

$$\mathrm{F}(\mu) = \lambda m = \psi(\mu)$$

$$\mathrm{F}'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu} = \psi'(\mu)\,.$$

Da nun $\psi'(y)$ mit wachsendem y immer wächst (oder wenigstens nicht abnimmt, was stets hinzuzudenken ist), und da $\mathrm{F}'(y)$ andererseits constant ist, so wird die Differenz $\psi'(y) - \mathrm{F}'(y) = \frac{d(\psi(y) - \mathrm{F}(y))}{dy}$ für Werthe von y, welche grösser als μ sind, positiv, für kleinere negativ sein. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass $\psi(y) - \mathrm{F}(y)$ immer eine positive Grösse, und dass ferner $\psi(y)$ immer absolut grösser oder wenigstens nicht kleiner als $\mathrm{F}(y)$ ist, wenigstens so lange als der Werth von $\mathrm{F}(y)$ positiv ist, d. h. von $y = \mu f$ bis $y = 1$. Deshalb wird der Werth des Integrals $\int [\mathrm{F}(y)]^2\,dy$ von $y = \mu f$ bis $y = 1$ kleiner sein als der Werth des Integrals $\int [\psi(y)]^2\,dy$ in denselben Grenzen, und um so mehr auch kleiner als der Werth dieses Integrals von $y = 0$ bis $y = 1$, welches $= m^2$ ist. Der Werth des ersteren Integrals ergiebt sich aber

$$= \frac{\lambda^2 m^2 (1 - \mu f)^3}{3 \mu^2 (1 - f)^2},$$

woraus man entnimmt, dass λ^2 kleiner sei als $\frac{3\mu^2 (1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, wo die Grösse f zwischen 0 und 1 liegt. Der Werth des Bruches $\frac{3\mu^2 (1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, dessen Differential, wenn f als Variable betrachtet wird,

$$= - \frac{3\mu^2 (1-f)}{(1-\mu f)^4} (2 - 3\mu + \mu f)\, df$$

ist, nimmt ferner beständig ab, wenn f vom Werthe 0 bis zum Werthe 1 steigt, sobald μ kleiner ist als $\frac{2}{3}$; der grösstmögliche Werth wird deshalb dem Werthe $f = 0$ entsprechen und folglich $= 3\mu^2$ werden, so dass in diesem Fall λ sicher kleiner oder doch nicht grösser als $\mu \sqrt{3}$ wird. W. z. b. w. Wenn hingegen μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist, so wird der grösste Werth jenes Bruches für $2 - 3\mu + \mu f = 0$ eintreten, d. h. für $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, und zwar wird derselbe $= \frac{4}{9(1-\mu)}$, und λ kann also in diesem Falle nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$ sein. W. z. b. w.

So kann z. B. für $\mu = \frac{1}{2}$ sicher λ nicht grösser als $\sqrt{\frac{3}{4}}$ werden, d. h. der wahrscheinliche Fehler kann die Grenze $0{,}8660254\, m$ nicht übersteigen, welcher Werth für ihn im ersten Beispiel des Art. 9. gefunden wurde. Ferner schliesst man aus unserem Satze leicht, dass μ nicht kleiner als $\lambda \sqrt{\frac{1}{3}}$ sei, so lange λ kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist, dass hingegen μ nicht kleiner als $1 - \frac{4}{9\lambda^2}$ sein könne, wenn der Werth von λ grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist.

11.

Da mehrere der später zu behandelnden Aufgaben auch mit dem Werth des Integrals $\int x^4 \varphi(x)\, dx$ im Zusammenhang stehen, so wird es die Mühe lohnen, denselben für einige specielle Fälle zu ermitteln. Wir bezeichnen den Werth dieses von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals mit n^4.

I. Für $\varphi(x) = \frac{1}{2a}$ wird, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ eingeschlossen ist, $n^4 = \frac{1}{5}a^4 = \frac{9}{5}m^4$.

II. Für den zweiten Fall des Art. 9., wenn $\varphi(x) = \frac{a \mp x}{a^2}$ für Werthe von x zwischen 0 und $\pm a$ ist, hat man $n^4 = \frac{1}{15}a^4 = \frac{12}{5}m^4$.

III. Im dritten Fall, wenn

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

findet man, nach den in der oben angeführten Abhandlung erhaltenen Resultaten, $n^4 = \frac{3}{4}h^4 = 3m^4$.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass der Werth von $\frac{n^4}{m^4}$ nicht kleiner als $\frac{9}{5}$ sein kann, wenn nur die Voraussetzung des vorigen Art. erfüllt ist.

12.

Bezeichnen x, x', x'' etc. allgemein Fehler von Beobachtungen derselben Art, die unabhängig von einander seien, und drückt ein vorgesetztes Zeichen φ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten aus, ist ferner y eine gegebene rationale Funktion der Variabeln x, x', x'' etc., dann wird das vielfache Integral

$$\int \varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots . \, dx\, dx'\, dx'' \ldots . , \tag{I}$$

erstreckt über alle Werthe der Variabeln x, x', x'' etc., für welche der Werth des y zwischen die gegebenen Grenzen 0 und η fällt, die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, dass der Werth des y irgendwo zwischen 0 und η liegt. Offenbar wird dieses Integral eine Funktion von η sein, deren Differential wir $= \psi(\eta)\, d\eta$ setzen, so dass das Integral selbst dem Integral $\int \psi(\eta)\, d\eta$, von $\eta = 0$ angefangen, gleich ist. Alsdann wird das Zeichen $\psi(\eta)$ die relative Wahrscheinlichkeit eines jeden Werthes von y ausdrücken müssen. Da man x nun als eine Funktion der Variabeln y, x', x'' etc. ansehen kann, die mit $f(y, x', x'' \ldots)$ bezeichnet werden möge, so verwandelt sich das Integral (I) in

$$\int \varphi[f(y, x', x'' \ldots)] \frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\, \varphi(x')\, \varphi(x'') \ldots dy\, dx'\, dx'' \ldots ,$$

wo y von $y = 0$ bis $y = \eta$ genommen werden muss, die übrigen Variablen aber über alle Werthe zu erstrecken sind, denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht. Hieraus schliesst man, dass

$$\psi(y) = \int \varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)]\,\frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dx'\,dx'' \ldots,$$

wo die Integration, bei welcher y als constant betrachtet werden muss, über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc. zu erstrecken ist, die für $f(y, x', x'' \ldots)$ einen reellen Werth ergeben.

13.

Um obige Integration wirklich auszuführen, müsste man die Funktion φ kennen, welche im allgemeinen unbekannt ist. Selbst wenn aber auch die Funktion bekannt wäre, würde die Integration meistens die Kräfte der Analysis übersteigen. Deshalb werden wir zwar die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werthe des y nicht angeben können; anders aber wird es sich verhalten, wenn man nur den mittleren Werth des y verlangt; derselbe ergiebt sich nämlich durch Integration von $\int y\,\psi(y)\,dy$ über alle möglichen Werthe des y. Und da man offenbar für alle Werthe, welche y nicht annehmen kann — sei es der Natur der mit y bezeichneten Funktion wegen (z. B. bei $y = x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. für die negativen Werthe), sei es um der den Fehlern x, x', x'' etc. gesetzten bestimmten Grenzen willen —, $\psi(y) = 0$ setzen muss, so darf man mit demselben Rechte offenbar jene Integration über alle reellen Werthe von y erstrecken, also von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$. Nun ist aber das in den bestimmten Grenzen von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ genommene Integral $\int y\,\psi(y)\,dy$ gleich dem Integral

$$\int y\,\varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)]\,\frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dy\,dx'\,dx'' \ldots,$$

welches gleichfalls von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ und über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc., denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht, zu erstrecken ist; oder, was dasselbe ist, auch gleich dem Werthe des Integrals

$$\int y\,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dx\,dx'\,dx'' \ldots,$$

wenn bei dieser Integration für y sein Werth als Funktion von x, x', x'' etc. eingesetzt, und dieselbe über alle Werthe dieser Variabeln, welchen ein zwischen η und η' liegender Werth des y entspricht, ausgedehnt wird. Hieraus folgern wir, dass das über alle Werthe

des y, von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ ausgedehnte Integral $\int y\,\psi(y)\,dy$ aus der Integration von

$$\int y\,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots dx\,dx'\,dx''\ldots$$

erhalten wird, wenn man dieselbe über alle reellen Werthe von x, x', x'' etc. erstreckt, demnach von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc.

14.

Besteht daher die Funktion y nur aus einer Summe von Gliedern von der Form

$$\mathrm{A}\,x^{\alpha}\,x'^{\beta}\,x''^{\gamma}\ldots,$$

so wird der Werth des über alle Werthe von y erstreckten Integrals $\int y\,\psi(y)\,dy$, oder der mittlere Werth von y, einer Summe von Gliedern

$$\mathrm{A} \times \int x^{\alpha}\,\varphi(x)\,dx \times \int x'^{\beta}\,\varphi(x')\,dx' \times \int x''^{\gamma}\,\varphi(x'')\,dx''\ldots$$

gleich sein, bei welchen die Integrationen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc. zu nehmen sind; oder, was dasselbe ist, gleich einer Summe von Gliedern, welche entstehen, wenn man für die einzelnen Potenzen x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ihre mittleren Werthe einsetzt. Die Richtigkeit dieses so wichtigen Lehrsatzes hätte auch leicht aus anderen Ueberlegungen gefolgert werden können.

15.

Wir wollen den im vorigen Art. aufgestellten Lehrsatz auf den speciellen Fall anwenden, dass

$$y = \frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma},$$

wo σ die Anzahl der Glieder im Zähler bezeichnet. Den mittleren Werth des y finden wir hier ohne Weiteres $= m^2$, indem wir dem Buchstaben m dieselbe Bedeutung wie oben geben. Der wahre Werth des y kann sich zwar in einem bestimmten Fall grösser oder kleiner als dieser mittlere ergeben, ebenso wie der wahre Werth eines einzelnen Gliedes x^2; die Wahrscheinlichkeit aber, dass ein gelegentlicher Werth des y von dem mittleren m^2 nicht wesentlich abweiche, wird sich stetig um so mehr der Gewissheit nähern, je mehr die Zahl σ wächst. Um dieses noch klarer zu zeigen, werden wir, da wir die Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau zu bestimmen

im Stande sind, den mittleren bei der Annahme $y = m^2$ zu befürchtenden Fehler suchen. Nach den im Art. 6. aufgestellten Principien wird dieser Fehler offenbar gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Funktion

$$\left(\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma} - m^2\right)^2$$

sein; zur Auffindung desselben genügt die Bemerkung, dass der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{x^4}{\sigma^2}$ gleich $\frac{n^4}{\sigma^2}$ ist (wo der Buchstabe n dieselbe Bedeutung wie im Art. 11. hat), dass dagegen der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{2x^2x'^2}{\sigma^2}$ gleich $\frac{2m^4}{\sigma^2}$ ist; woraus unmittelbar der mittlere Werth jener Funktion

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

folgt.

Hieraus ersehen wir, dass, wenn nur eine hinlänglich grosse Anzahl von einander unabhängiger, zufälliger Fehler x, x', x'' etc. vorhanden ist, aus ihnen ein angenäherter Werth des m mit grosser Sicherheit mittelst der Formel

$$m = \sqrt{\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}}$$

gefunden werden könne, und dass der mittlere bei dieser Bestimmung zu befürchtende Fehler des Quadrates m^2

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

sei. Da indess diese letzte Formel die Grösse n enthält, so wird es genügen, falls es sich nur um die Erlangung einer ungefähren Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade jener Bestimmung handelt, irgend eine specielle Form der Funktion φ anzunehmen. Z. B. wird bei der dritten Annahme der Art. 9. und 11. dieser Fehler $= m^2\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Wenn dies weniger befriedigt, so kann ein angenäherter Werth von n^4 aus den Fehlern selbst mit Hülfe der Formel

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

abgeleitet werden. Im allgemeinen können wir aber versichern, dass

für eine zweimal grössere Genauigkeit jener Bestimmung eine vierfache Anzahl von Fehlern erforderlich ist, oder dass das Gewicht der Bestimmung der Anzahl σ selbst proportional ist.

Auf ähnliche Weise wird man ferner, wenn die Beobachtungsfehler einen constanten Theil besitzen, einen angenäherten Werth dieses Theils um so sicherer aus dem arithmetischen Mittel vieler Fehler ableiten können, je grösser deren Anzahl war. Und zwar wird der mittlere zu befürchtende Fehler dieser Bestimmung durch

$$\sqrt{\frac{m^2 - k^2}{\sigma}}$$

ausgedrückt, wenn k den constanten Theil selbst und m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil noch nicht befreiten Beobachtungen ausdrückt; oder einfach durch $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, wenn m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil freien Beobachtungen bezeichnet. (Siehe Art. 8.)

16.

In den Art. 12. bis 15. haben wir vorausgesetzt, dass die Fehler x, x', x'' etc. sich auf dieselbe Gattung von Beobachtungen beziehen, so dass die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen durch dieselbe Funktion ausgedrückt werde. Augenscheinlich kann aber die allgemeine Untersuchung der Art. 12. bis 14. ebenso leicht auf den allgemeineren Fall ausgedehnt werden, wo die Wahrscheinlichkeiten der Fehler x, x', x'' etc. durch verschiedene Funktionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$ etc. ausgedrückt werden, d. h. wo sich jene Fehler auf Beobachtungen verschiedener Schärfe oder Unsicherheit beziehen. Nehmen wir an, x sei der Fehler einer Beobachtung, deren mittlerer zu befürchtender Fehler $= m$ ist; ebenso seien x', x'' etc. die Fehler anderer Beobachtungen, deren mittlere zu befürchtende Fehler bezw. m', m'' etc. sind. Dann wird der mittlere Werth der Summe $x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. gleich $m^2 + m'^2 + m''^2 +$ etc. sein. Ist nun anderweit schon bekannt, dass die Grössen m, m', m'' etc. in gegebenem Verhältniss zueinander stehen, also den Zahlen 1, μ', μ'' etc. bezw. proportional sind, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

$= m^2$ sein. Setzen wir aber einen bestimmten Werth dieses Aus-

drucks, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, dem m^2 gleich, so wird der mittlere Fehler, welcher dieser Bestimmung noch anhaftet, auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Art.

$$= \frac{\sqrt{n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

gefunden, wo n', n'' etc. in Bezug auf die Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, dieselbe Bedeutung haben sollen, wie n in Bezug auf die erste Beobachtung. Wenn man nun die Zahlen n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen darf, so wird jener mittlere zu befürchtende Fehler

$$= \frac{\sqrt{n^4 - m^4}\ \sqrt{1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}.$$

Diese Methode, einen angenäherten Werth von m zu bestimmen, ist aber nicht die zweckmässigste. Um dies desto deutlicher zu machen, betrachten wir den allgemeineren Ausdruck

$$y = \frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{1 + \alpha' \mu'^2 + \alpha'' \mu''^2 + \text{etc.}},$$

dessen mittlerer Werth ebenfalls $= m^2$ wird, wie man auch die Coefficienten α', α'' etc. wählen möge. Der mittlere zu befürchtende Fehler aber wird, wenn man einen bestimmten Werth von y, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, gleich m^2 annimmt, mit Hülfe der oben vorgetragenen Principien

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4) + \alpha'^2 (n'^4 - m'^4) + \alpha''^2 (n''^4 - m''^4) + \text{etc.}}}{1 + \alpha' \mu'^2 + \alpha'' \mu''^2 + \text{etc.}}$$

gefunden. Damit dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird, ist zu setzen:

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \mu'^2$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \mu''^2 \ \text{etc.}$$

Offenbar können diese Werthe nur dann berechnet werden, wenn überdies die Beziehung der Grössen n, n', n'' etc. zu m, m', m'' etc. anderweit bekannt ist; fehlt aber diese genaue Kenntniss, so erscheint

es wenigstens am sichersten*), sie zu einander proportional anzunehmen (siehe Art. 11.), woraus man die Werthe erhält

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'^2}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''^2} \text{ etc.},$$

d. h. die Coefficienten α', α'' etc. müssen den relativen Gewichten der Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, gleich gesetzt werden, nachdem man das Gewicht der Beobachtung, zu welcher der Fehler x gehört, als Einheit angenommen hat. Wenn hiernach, wie oben, σ die Anzahl der vorhandenen Fehler bezeichnet, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= m^2$, und der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir einen zufällig bestimmten Werth dieses Ausdrucks als wahren Werth von m^2 annehmen, ergiebt sich

$$= \frac{\sqrt{n^4 + \alpha'^2 n'^4 + \alpha''^2 n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4}}{\sigma},$$

und folglich, wenn wir nur die n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen dürfen,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}},$$

welche Formel mit der oben für den Fall von Beobachtungen derselben Art gefundenen übereinstimmt.

17.

Wenn der Werth einer Grösse, die von einer anderen unbekannten Grösse abhängt, durch eine nicht völlig genaue Beobachtung bestimmt ist, so wird der hieraus berechnete Werth der Unbekannten auch einem Fehler unterworfen sein; es bleibt aber bei dieser Bestimmungsweise nichts der Willkür überlassen. Wenn aber *mehrere* von derselben Unbekannten abhängige Grössen durch nicht völlig genaue Beobachtungen bestimmt sind, so kann man den

*) Wir können uns nämlich die Kenntniss der Grössen μ', μ'' etc. nur in dem einen Falle erlangt denken, wo der Natur der Sache nach Fehler x, x', x'' etc., welche zu 1, μ', μ'' etc. proportional sind, als gleich wahrscheinlich anzunehmen sind, oder vielmehr, wo

$$\varphi(x) = \mu'\varphi'(\mu' x) = \mu''\varphi''(\mu'' x) \text{ etc.}$$

Werth der Unbekannten entweder aus irgend einer dieser Beobachtungen ableiten, oder auch aus irgend einer Combination mehrerer Beobachtungen, was auf unendlich verschiedene Weisen geschehen kann. Wenn nun auch der auf eine solche Weise erhaltene Werth der Unbekannten immer einem Fehler unterworfen bleibt, so wird doch bei der einen Combination ein grösserer, bei einer anderen ein kleinerer Fehler zu befürchten sein. Aehnlich wird es sich verhalten, wenn mehrere Grössen, die von mehreren Unbekannten zugleich abhängen, beobachtet sind: jenachdem die Anzahl der Beobachtungen entweder der Anzahl der Unbekannten gleich, oder kleiner oder grösser als diese ist, wird die Aufgabe entweder bestimmt oder unbestimmt oder überbestimmt sein (wenigstens im allgemeinen), und im dritten Fall wird man zur Bestimmung der Unbekannten die Beobachtungen auf unendlich verschiedene Weisen combiniren können. Aus dieser Mannigfaltigkeit der Combinationen diejenigen auszuwählen, welche der Sache am besten dienen, d. h. welche die mit den kleinsten Fehlern behafteten Werthe der Unbekannten liefern, ist unstreitig bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften eine der wichtigsten Aufgaben.

In der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" haben wir gezeigt, wie die *wahrscheinlichsten* Werthe der Unbekannten abzuleiten sind, wenn das Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler bekannt ist; und da dieses Gesetz seiner Natur nach in beinahe allen Fällen hypothetisch bleibt, so haben wir jene Theorie auf das plausibelste Gesetz angewendet, wobei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x der Exponentialgrösse $e^{-h^2x^2}$ proportional genommen wird; und hieraus ist das Verfahren entstanden, welches von uns schon lange und zwar besonders bei astronomischen Rechnungen gebraucht wurde, und jetzt unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate von den meisten Rechnern angewandt wird.

Später zeigte *Laplace*, indem er die Sache anders angriff, dass gerade dieses Princip, wie auch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler beschaffen sei, allen anderen immer noch vorzuziehen sei, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen eine sehr grosse ist. Ist jedoch die Anzahl der Beobachtungen eine mässige, so bleibt die Frage unentschieden, so dass bei Verwerfung unseres hypothetischen Gesetzes die Methode der kleinsten Quadrate nur deshalb vor anderen empfohlen zu werden verdiente, weil sie zur Vereinfachung der Rechnungen am besten geeignet ist.

Wir hoffen deshalb, den Mathematikern einen Dienst zu erweisen, indem wir bei dieser neuen Behandlung des Gegenstandes zeigten, dass die Methode der kleinsten Quadrate die beste von allen Combinationen liefere, und zwar nicht angenähert, sondern unbedingt, welches auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Fehler, und welches auch die Anzahl der Beobachtungen sei, wenn man nur die Definition des mittleren Fehlers nicht im Sinne von *Laplace*, sondern so, wie es von uns in den Art. 5. und 6. geschehen ist, feststellt.

Uebrigens muss hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass es sich in allen folgenden Untersuchungen nur um die unregelmässigen und vom constanten Theil freien Fehler handelt, da es im Grunde zu einer vollkommenen Beobachtungskunst gehört, alle Ursachen constanter Fehler möglichst fernzuhalten. Was für Vortheile aber ein Rechner, welcher solche Beobachtungen zu discutiren unternimmt, von denen man mit Recht argwöhnt, dass sie von constanten Fehlern nicht frei seien, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst erlangen kann, darüber behalten wir uns vor, eine besondere Untersuchung bei einer anderen Gelegenheit zu veröffentlichen.

18.

Aufgabe. Es bezeichne U eine gegebene Funktion der unbekannten Grössen V, V′, V″ etc.; man sucht den mittleren bei der Bestimmung des Werthes von U zu befürchtenden Fehler M, wenn für V, V′, V″ etc. nicht ihre wahren Werthe, sondern diejenigen genommen werden, welche aus von einander unabhängigen und bezw. mit den mittleren Fehlern m, m', m'' etc. behafteten Beobachtungen hervorgehen.

Lösung. Es seien e, e', e'' etc. die Fehler der beobachteten Werthe von V, V′, V″ etc.; alsdann kann der aus ihnen folgende Fehler des Werthes von U durch die lineare Funktion

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = \mathrm{E}$$

ausgedrückt werden, wo λ, λ', λ'' etc. die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}$, $\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}'}$, $\frac{d\mathrm{U}''}{d\mathrm{V}''}$ etc. für die wahren Werthe der V, V′, V″ etc. sind, wenn nur die Beobachtungen hinlänglich genau sind, um die Quadrate und Produkte der Fehler vernachlässigen zu dürfen. Hieraus folgt erstens, da ja die Beobachtungsfehler als von constanten Theilen frei angenommen werden, dass der mittlere Werth

von E gleich 0 sein müsse. Ferner wird der mittlere zu befürchtende Fehler des Werthes von U gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe von E^2 sein, oder M^2 wird der mittlere Werth der Summe

$$\lambda^2 e^2 + \lambda'^2 e'^2 + \lambda''^2 e''^2 + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

sein. Der mittlere Werth von $\lambda^2 e^2$ ist aber $\lambda^2 m^2$, der mittlere Werth von $\lambda'^2 e'^2$ ist $= \lambda'^2 m'^2$ etc., endlich sind die mittleren Werthe der Produkte $2\lambda\lambda' ee'$ etc. sämmtlich $= 0$. Hieraus schliessen wir also:

$$M = \sqrt{\lambda^2 m^2 + \lambda'^2 m'^2 + \lambda''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

Dieser Lösung wollen wir einige Anmerkungen beifügen.

I. Insoweit man die Beobachtungsfehler als Grössen erster Ordnung ansieht und Grössen höherer Ordnung vernachlässigt, darf man in unserer Formel für λ, λ', λ'' etc. auch diejenigen Werthe der Quotienten $\frac{dU}{dV}$ etc. nehmen, welche aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. hervorgehen. Wenn U eine lineare Funktion ist, so ist hierbei offenbar kein Unterschied vorhanden.

II. Will man an Stelle der mittleren Fehler der Beobachtungen lieber deren Gewichte einführen, so seien diese, auf eine willkürliche Einheit bezogen, bezw. p, p', p'' etc., und P sei das Gewicht der Bestimmung des sich aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. ergebenden Werthes von U. Wir erhalten dann

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \text{etc.}}.$$

III. Ist T eine andere gegebene Funktion der Grössen V, V′, V″ etc., und ist für deren wahre Werthe

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.},$$

so wird der Fehler in der aus den beobachteten Werthen von V, V′, V″ etc. erhaltenen Bestimmung des Werthes von T

$$= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' + \text{etc.} = E',$$

und der mittlere bei jener Bestimmung zu befürchtende Fehler

$$= \sqrt{\varkappa^2 m^2 + \varkappa'^2 m'^2 + \varkappa''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

sein. Die Fehler E, E′ werden aber offenbar nicht mehr von einander unabhängig sein, und der mittlere Werth des Produktes EE′ wird, im Gegensatz zum mittleren Werthe des Produktes ee', nicht $= 0$, sondern $= \varkappa\lambda m^2 + \varkappa'\lambda' m'^2 + \varkappa''\lambda'' m''^2 +$ etc. sein.

IV. Man kann unsere Aufgabe auch auf den Fall ausdehnen, wo die Werthe der Grössen V, V′, V″ etc. nicht unmittelbar aus den Beobachtungen gefunden, sondern irgendwie aus Combinationen der Beobachtungen abgeleitet werden, wenn nur die Bestimmungen der einzelnen von einander unabhängig sind, d. h. auf verschiedenen Beobachtungen beruhen: sobald aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, würde die Formel für M falsch werden. Wäre z. B. eine oder die andere zur Bestimmung des Werthes von V verwendete Beobachtung auch zur Bestimmung des Werthes von V′ benutzt worden, so würden die Fehler e und e' nicht mehr von einander unabhängig, und der mittlere Werth des Produkts ee' deshalb auch nicht mehr $= 0$ sein. Wenn aber in einem solchen Fall der Zusammenhang der Grössen V und V′ mit den einfachen Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, genau bekannt ist, so wird man den mittleren Werth des Produktes ee' nach der Anmerkung III. bestimmen, und so die Formel für M vervollständigen können.

19.

Es seien V, V′, V″ etc. Funktionen der Unbekannten x, y, z etc.; die Anzahl jener sei $= \pi$, die Anzahl der Unbekannten $= \varrho$; wir nehmen an, durch Beobachtungen seien unmittelbar oder mittelbar die Werthe der Funktionen $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. gefunden, jedoch so, dass diese Bestimmungen unabhängig von einander sind. Ist ϱ grösser als π, so ist die Aufsuchung der Unbekannten offenbar eine unbestimmte Aufgabe; ist ϱ gleich π, so können die einzelnen x, y, z etc. als Funktionen von V, V′, V″ etc. entweder dargestellt oder in dieser Form gedacht werden, so dass aus den beobachteten Werthen von diesen die Werthe von jenen gefunden werden können, worauf man mit Hülfe des vorigen Art. die diesen einzelnen Bestimmungen zukommende relative Genauigkeit berechnen kann; ist endlich ϱ kleiner als π, so lassen sich die einzelnen x, y, z etc. auf unendlich verschiedene Weisen als Funktionen von V, V′, V″ etc. darstellen, und man kann deshalb für jene auf unendlich verschiedene Weisen Werthe ableiten. Diese Bestimmungen müssten nun völlig identisch sein, wenn den Beobachtungen absolute Genauigkeit zukäme; da dies indess nicht der Fall ist,

so werden andere Weisen andere Werthe ergeben, und ebenso werden die aus verschiedenen Combinationen erhaltenen Bestimmungen mit verschiedener Genauigkeit begabt sein.

Wenn übrigens im zweiten oder dritten Fall die Funktionen V, V′, V″ etc. so beschaffen wären, dass $\pi - \varrho + 1$ oder mehrere unter ihnen als Funktionen der übrigen betrachtet werden könnten, so würde die Aufgabe in Bezug auf die letzteren Funktionen immer noch überbestimmt sein, in Bezug auf die Unbekannten x, y, z etc. aber unbestimmt; und man könnte die Werthe der letzteren selbst dann nicht einmal bestimmen, wenn die Werthe der Funktionen V, V′, V″ etc. völlig genau gegeben wären; diesen Fall werden wir aber von unseren Untersuchungen ausschliessen.

Sobald V, V′, V″ etc. nicht von vorn herein *lineare* Funktionen ihrer Variabeln sind, so kann man ihnen diese Form geben, indem man an Stelle der ursprünglichen Unbekannten deren Unterschiede gegen angenäherte Werthe, welche man als anderweit bekannt voraussetzen darf, einsetzt. Die mittleren in den Bestimmungen $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. zu befürchtenden Fehler bezeichnen wir bezw. mit m, m', m'' etc., und die Gewichte der Bestimmungen mit p, p', p'' etc., so dass $pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2 =$ etc. ist. Wir setzen das Verhältniss der mittleren Fehler zu einander als bekannt voraus, so dass die Gewichte, von denen man eines beliebig annehmen kann, ebenfalls bekannt sind. Endlich setzen wir

$$(V - L)\sqrt{p} = v, \quad (V' - L')\sqrt{p'} = v', \quad (V'' - L'')\sqrt{p''} = v'' \text{ etc.}$$

Dann wird sich die Sache offenbar ebenso verhalten, als wenn unmittelbare Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, deren mittlerer Fehler also $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc. ist, oder denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird, auf

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0 \text{ etc.}$$

geführt hätten.

20.

Aufgabe. Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die folgenden linearen Funktionen der Variabeln x, y, z etc.:

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es soll aus allen Systemen von Coefficienten $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ etc., welche allgemein

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

geben, wo k eine bestimmte, d. h. von x, y, z etc. unabhängige Grösse ist, das System ermittelt werden, für welches $\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 +$ etc. den kleinsten Werth erhält.

Lösung. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

etc. Dann sind auch ξ, η, ζ etc. lineare Funktionen von x, y, z etc., nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(wo Σa^2 die Summe $a^2 + a'^2 + a''^2 +$ etc. bezeichnet, und analog bei den übrigen); die Anzahl der ξ, η, ζ etc. ist hierbei der Anzahl der Variabeln x, y, z etc. gleich, nämlich $= \varrho$. Man kann deshalb durch Elimination eine Gleichung folgender Art ableiten*):

$$x = A + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.},$$

aus welcher durch Substitution der Werthe von ξ, η, ζ etc. nach (3) eine identische Gleichung hervorgehen muss. Wenn man folglich

$$\left.\begin{aligned} a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha \\ a'\,[\alpha\alpha] + b'\,[\alpha\beta] + c'\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha' \\ a''\,[\alpha\alpha] + b''\,[\alpha\beta] + c''\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

setzt, so wird nothwendig allgemein

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A. \tag{5}$$

Diese Gleichung zeigt, dass unter die Werthsysteme der Coefficienten $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ etc. sicher auch dieses: $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. zu rechnen ist, ebenso dass für ein beliebiges System allgemein

$$(\varkappa - \alpha)\,v + (\varkappa' - \alpha')\,v' + (\varkappa'' - \alpha'')\,v'' + \text{etc.} = A - k$$

werden muss; eine Gleichung, welche die folgenden einschliesst:

*) Der Grund, weshalb wir für die aus einer solchen Elimination hervorgehenden Coefficienten gerade diese Bezeichnung ausgewählt haben, wird später einleuchten.

$$(\varkappa-\alpha)\,a+(\varkappa'-\alpha')\,a'+(\varkappa''-\alpha'')\,a''+\text{etc.}=0$$
$$(\varkappa-\alpha)\,b+(\varkappa'-\alpha')\,b'+(\varkappa''-\alpha'')\,b''+\text{etc.}=0$$
$$(\varkappa-\alpha)\,c+(\varkappa'-\alpha')\,c'+(\varkappa''-\alpha'')\,c''+\text{etc.}=0 \text{ etc.}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addiren, so erhalten wir wegen (4):

$$(\varkappa-\alpha)\,\alpha+(\varkappa'-\alpha')\,\alpha'+(\varkappa''-\alpha'')\,\alpha''+\text{etc.}=0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned}&\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\text{etc.}\\ =\ &\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\text{etc.}+(\varkappa-\alpha)^2+(\varkappa'-\alpha')^2+(\varkappa''-\alpha'')^2+\text{etc.},\end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Summe $\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\text{etc.}$ den kleinsten Werth erhält, wenn man $\varkappa=\alpha$, $\varkappa'=\alpha'$, $\varkappa''=\alpha''$ etc. setzt. Was zu finden war.

Dieser kleinste Werth selbst wird übrigens auf folgende Weise ermittelt. Die Gleichung (5) zeigt, dass

$$\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a''+\text{etc.}=1$$
$$\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b''+\text{etc.}=0$$
$$\alpha c+\alpha' c'+\alpha'' c''+\text{etc.}=0 \text{ etc.}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) sofort

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\text{etc.}=[\alpha\alpha].$$

21.

Wenn die Beobachtungen die (der Wahrheit sehr nahe kommenden) Gleichungen $v=0$, $v'=0$, $v''=0$ etc. geliefert haben, so muss man, um aus ihnen den Werth der Unbekannten x zu finden, eine solche Combination

$$\varkappa v+\varkappa' v'+\varkappa'' v''+\text{etc.}=0$$

dieser Gleichungen aufsuchen, dass der Coefficient von x gleich 1 wird, und die übrigen Unbekannten y, z etc. eliminirt werden; dieser Bestimmung wird nach Art. 18. das Gewicht

$$=\frac{1}{\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\text{etc.}}$$

zu geben sein. Aus dem vorigen Art. folgt daher, die zweckmässigste Bestimmung werde die sein, wenn man $\varkappa=\alpha$, $\varkappa'=\alpha'$, $\varkappa''=\alpha''$ etc. setzt. Alsdann erhält x den Werth A; offenbar

kann man denselben Werth (ohne Kenntniss der Multiplicatoren α, α', α'' etc.) auch direkt durch Elimination aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. ableiten. Das dieser Bestimmung zu ertheilende Gewicht wird $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, oder der mittlere bei ihr zu befürchtende Fehler wird

$$= m \sqrt{p\,[\alpha\alpha]} = m' \sqrt{p'\,[\alpha\alpha]} = m'' \sqrt{p''\,[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

sein.

Auf analoge Weise wird ferner die zweckmässigste Bestimmung der übrigen Unbekannten y, z etc. für sie dieselben Werthe ergeben, welche durch Elimination aus den nämlichen Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. hervorgehen.

Bezeichnen wir die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc. oder, was dasselbe ist,

$$p\,(V - L)^2 + p'\,(V' - L')^2 + p''\,(V'' - L'')^2 + \text{etc.}$$

mit Ω, so sind offenbar 2ξ, 2η, 2ζ etc. die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω, nämlich

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy}, \quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Demnach werden die Werthe der Unbekannten, welche aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen hervorgehen, und welche man passend die *plausibelsten Werthe* nennen kann, mit denen identisch sein, die Ω zu einem Minimum machen. Nun drückt $V - L$ allgemein die Differenz des berechneten und des beobachteten Werthes aus. Die plausibelsten Werthe der Unbekannten werden deshalb dieselben sein, welche die Summe der mit den Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. zu einem Minimum machen, ein Princip, welches wir in der „Theoria Motus Corporum Coelestium" von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus festgestellt hatten. Und wenn ausserdem die relative Genauigkeit der einzelnen Bestimmungen angegeben werden soll, so muss man die x, y, z etc. durch unbestimmte Elimination aus den Gleichungen (3) in folgender Form ableiten:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

etc.,

wonach die plausibelsten Werthe der Unbekannten x, y, z etc.

bezw. A, B, C etc., und die diesen Bestimmungen zukommenden Gewichte $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., oder die mittleren bei denselben zu befürchtenden Fehler

für x . . . . . . $m\sqrt{p}\,[\alpha\alpha] = m'\sqrt{p'}\,[\alpha\alpha] = m''\sqrt{p''}\,[\alpha\alpha]$ etc.
für y . . . . . . $m\sqrt{p}\,[\beta\beta] = m'\sqrt{p'}\,[\beta\beta] = m''\sqrt{p''}\,[\beta\beta]$ etc.
für z . . . . . . $m\sqrt{p}\,[\gamma\gamma] = m'\sqrt{p'}\,[\gamma\gamma] = m''\sqrt{p''}\,[\gamma\gamma]$ etc.
etc.

sein werden, ein Resultat, welches mit dem in der „Theoria Motus Corporum Coelestium" abgeleiteten übereinstimmt.

22.

Wir wollen den allereinfachsten, zugleich aber auch häufigsten Fall, dass nur eine einzige Unbekannte vorhanden ist, und $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc. wird, in Kürze besonders behandeln. Es wird nämlich $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., und folglich

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{etc.})\,x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}).$$

Hieraus weiter

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}.$$

Wenn man demnach aus mehreren Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, deren Gewichte bezw. p, p', p'' etc. sind, den Werth einer und derselben Grösse ermittelt hat, und zwar aus der ersten $= L$, aus der zweiten $= L'$, aus der dritten $= L''$ etc., so wird der plausibelste Werth derselben

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung $= p + p' + p'' + \text{etc.}$ sein. Sind alle Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so wird der plausibelste Werth

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{etc.}}{\pi}$$

sein, d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werthe, und das Gewicht dieser Bestimmung $= \pi$, wenn man das Gewicht der Beobachtungen als Einheit annimmt.

Zweiter Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1823, Februar 2.)

23.

Es erübrigen noch mehrere Untersuchungen, welche die vorhergehende Theorie sowohl erläutern als auch besonders erweitern sollen.

Vor allen muss man nachforschen, ob das Geschäft der Elimination, mittelst deren die Unbekannten x, y, z etc. durch die ξ, η, ζ etc. auszudrücken sind, immer ausführbar ist. Da die Anzahl jener der Anzahl dieser gleich ist, so wird, wie man aus der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen weiss, jene Elimination sicher möglich sein, wenn ξ, η, ζ etc. von einander unabhängig sind, im anderen Falle unmöglich. Nehmen wir für den Augenblick an, ξ, η, ζ etc. seien nicht von einander unabhängig, sondern es bestehe zwischen ihnen die identische Gleichung

$$0 = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}.$$

Wir hätten dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\Sigma a^2 + \mathrm{G}\Sigma ab + \mathrm{H}\Sigma ac + \text{etc.} &= 0 \\
\mathrm{F}\Sigma ab + \mathrm{G}\Sigma b^2 + \mathrm{H}\Sigma bc + \text{etc.} &= 0 \\
\mathrm{F}\Sigma ac + \mathrm{G}\Sigma bc + \mathrm{H}\Sigma c^2 + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$\mathrm{F}\Sigma al + \mathrm{G}\Sigma bl + \mathrm{H}\Sigma cl + \text{etc.} = -\mathrm{K}.$$

Setzt man alsdann

$$\left.\begin{aligned}
a\,\mathrm{F} + b\,\mathrm{G} + c\,\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta \\
a'\mathrm{F} + b'\mathrm{G} + c'\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta' \\
a''\mathrm{F} + b''\mathrm{G} + c''\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta''
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

etc., so folgt

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., und ausserdem

$$l\Theta + l'\Theta' + l''\Theta'' + \text{etc.} = -\text{K}.$$

Multiplicirt man demnach die Gleichungen (1) bezw. mit Θ, Θ', Θ'' etc. und addirt, so erhält man

$$0 = \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \text{etc.},$$

eine Gleichung, welche offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht gleichzeitig $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. wäre. Hieraus schliessen wir erstens, dass nothwendig $\text{K} = 0$ sein muss. Sodann zeigen die Gleichungen (1), dass die Funktionen v, v', v'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Werthe der Grössen x, y, z etc. um Grössen zu- oder abnehmen, welche bezw. den F, G, H etc. proportional sind. Dasselbe wird offenbar von den Funktionen V, V′, V″ etc. gelten. Die Voraussetzung kann also nicht statt haben, ausser in dem Falle, wenn es sogar schon unmöglich gewesen wäre, aus den genauen Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. zu bestimmen, d. h. wenn die Aufgabe ihrer Natur nach unbestimmt gewesen wäre, einen Fall, den wir von unserer Untersuchung ausgeschlossen haben.

24.

Wir bezeichnen mit β, β', β'' etc. Multiplicatoren, welche der Unbekannten y gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie die α, α' α'' etc. gegenüber dem x; es sei also

$$a\,[\beta\alpha] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - \text{B}.$$

Ebenso seien γ, γ', γ'' etc. analoge Multiplicatoren in Bezug auf die Unbekannte z, demnach

$$a\,[\gamma\alpha] + b\,[\gamma\beta] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma$$
$$a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \text{etc.} = z - \mathrm{C}$$

und so weiter. Ebenso wie wir im Art. 20. bereits fanden, dass $\Sigma aa = 1$, $\Sigma ab = 0$, $\Sigma ac = 0$ etc., und ausserdem $\Sigma al = -\mathrm{A}$, so erhalten wir hiernach auch

$$\begin{array}{llll} \Sigma\beta a = 0, & \Sigma\beta b = 1, & \Sigma\beta c = 0 \text{ etc. und} & \Sigma\beta l = -\mathrm{B} \\ \Sigma\gamma a = 0, & \Sigma\gamma b = 0, & \Sigma\gamma c = 1 \text{ etc. und} & \Sigma\gamma l = -\mathrm{C} \end{array}$$

u. s. w. Und gerade so, wie man im Art. 20. erhielt $\Sigma\alpha^2 = [\alpha\alpha]$, wird auch

$$\Sigma\beta^2 = [\beta\beta], \quad \Sigma\gamma^2 = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Wenn man ferner die Werthe der α, α', α'' etc. (Art. 20. (4)) bezw. mit β, β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\alpha\beta] \text{ oder } \Sigma\alpha\beta = [\alpha\beta].$$

Multiplicirt man aber die Werthe von β, β', β'' etc. bezw. mit α, α', α'' etc. und addirt, so folgt ebenso

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\beta\alpha], \text{ also } [\alpha\beta] = [\beta\alpha].$$

Es wird weiter auf analoge Weise gefunden

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma, \quad [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma\beta\gamma \text{ etc.}$$

25.

Ferner bezeichnen wir mit λ, λ', λ'' etc. diejenigen Werthe der Funktionen v, v', v'' etc., welche erhalten werden, wenn wir für x, y, z etc. ihre plausibelsten Werthe A, B, C etc. einsetzen, also

$$\begin{array}{l} a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} + l \;\; = \lambda \\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} + l' = \lambda' \\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} + l'' = \lambda'' \end{array}$$

etc.; wir setzen ausserdem

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \mathrm{M},$$

so dass M der Werth der Funktion Ω ist, welcher den plausibelsten Werthen der Variabeln entspricht, mithin auch der kleinste Werth dieser Funktion, wie wir im Art. 20. gezeigt haben. Hiernach wird $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' +$ etc. der Werth von ξ, welcher den Werthen $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. entspricht, und zugleich $= 0$ sein, d. h. wir erhalten

$$\Sigma a\lambda = 0,$$

und es wird ebenso

$\Sigma b\lambda = 0$, $\Sigma c\lambda = 0$ etc.; ausserdem $\Sigma\alpha\lambda = 0$, $\Sigma\beta\lambda = 0$, $\Sigma\gamma\lambda = 0$ etc. Multiplicirt man endlich die Ausdrücke von λ, λ', λ'' etc. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addirt, so erhält man

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \text{etc.} = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc., oder}$$
$$\Sigma l\lambda = \mathrm{M}.$$

26.

Ersetzen wir in der Gleichung $v = ax + by + cz + \text{etc.} + l$ die x, y, z etc. durch die Ausdrücke (7) des Art. 21., so folgt mit Hülfe von aus dem Vorhergehenden geläufigen Reduktionen

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} + \lambda$$

und ebenso wird allgemein

$$v' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \text{etc.} + \lambda'$$
$$v'' = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \text{etc.} + \lambda''$$

etc. Multipliciren wir diese oder die Gleichungen (1) des Art. 20. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addiren, so sehen wir, dass allgemein ist

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \text{etc.} = \mathrm{M}.$$

27.

Die Funktion Ω kann im allgemeinen in mehreren Formen dargestellt werden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird. Und zwar erhält man zunächst aus den Gleichungen (1) des Art. 20. durch Quadriren und Addiren unmittelbar

$$\Omega = x^2\Sigma a^2 + y^2\Sigma b^2 + z^2\Sigma c^2 + \text{etc.} + 2xy\Sigma ab + 2xz\Sigma ac + 2yz\Sigma bc + \text{etc.} + 2x\Sigma al + 2y\Sigma bl + 2z\Sigma cl + \text{etc.} + \Sigma l^2$$

als *erste* Form.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen bezw. mit v, v', v'' etc. und addirt, so erhält man

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

und hieraus, indem man für v, v', v'' etc. die im vorhergehenden Art. gegebenen Ausdrücke einsetzt,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - \mathrm{A}\xi - \mathrm{B}\eta - \mathrm{C}\zeta - \text{etc.} + \mathrm{M}$$

oder

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

als *zweite* Form.

Setzen wir in der zweiten Form für $x - A$, $y - B$, $z - C$ etc. die Ausdrücke (7) des Art. 21., so erhalten wir die *dritte* Form

$$\begin{aligned}\Omega = [\alpha\alpha]\,\xi^2 + [\beta\beta]\,\eta^2 + [\gamma\gamma]\,\zeta^2 + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\,\xi\eta \\ + 2[\alpha\gamma]\,\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\,\eta\zeta + \text{etc.} + M.\end{aligned}$$

Diesen kann als *vierte* Form die folgende hinzugefügt werden, welche sich aus der dritten und aus den Formeln des vorhergehenden Art. von selbst ergiebt,

$$\Omega = (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ oder}$$
$$\Omega = M + \Sigma(v - \lambda)^2,$$

welche Form die Bedingung des Minimums unmittelbar vor Augen führt.

28.

Es seien e, e', e'' etc. die Fehler, welche bei den Beobachtungen, die $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. ergeben haben, begangen sind; d. h. die wahren Werthe der Funktionen V, V', V'' etc. seien bezw. $L - e$, $L' - e'$, $L'' - e''$ etc., und folglich die wahren Werthe von v, v', v'' etc. bezw. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hiermit wird der wahre Werth des x

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} \text{ etc.,}$$

oder der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von x begangene Fehler, den wir mit $E(x)$ bezeichnen wollen, ist

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Analog wird der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von y begangene Fehler, den wir mit $E(y)$ bezeichnen werden,

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Den mittleren Werth des Quadrates $[E(x)]^2$ findet man

$$= m^2 p\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\alpha],$$

den mittleren Werth des Quadrates $[E(y)]^2$ ebenso $= m^2 p\,[\beta\beta]$ etc., wie wir schon oben zeigten. Nun kann man auch den mittleren Werth des *Produktes* $E(x)\,E(y)$ angeben; derselbe wird nämlich

$$= m^2 p\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\beta]$$

gefunden. Man kann dieses kurz auch so ausdrücken: Die mittleren Werthe der Quadrate $[E(x)]^2$, $[E(y)]^2$ etc. sind bezw. den Produkten aus $\frac{1}{2}\,m^2 p$ in die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2\Omega}{d\eta^2} \text{ etc.}$$

gleich, und der mittlere Werth eines solchen Produktes, wie $E(x)\,E(y)$, ist gleich dem Produkte aus $\frac{1}{2}m^2p$ in den Differentialquotienten $\frac{d^2\Omega}{d\xi\, d\eta}$, wenn man nämlich Ω als Funktion der Variabeln ξ, η, ζ etc. betrachtet.

29.

Es bezeichne t eine gegebene lineare Funktion der Grössen x, y, z etc., es sei also

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Der aus den plausibelsten Werthen von x, y, z etc. hervorgehende Werth von t wird demnach $= fA + gB + hC + \text{etc.} + k$ sein, den wir mit K bezeichnen wollen. Nimmt man diesen als wahren Werth von t an, so wird ein Fehler begangen

$$= fE(x) + gE(y) + hE(z) + \text{etc.},$$

der mit $E(t)$ bezeichnet werden möge. Der mittlere Werth dieses Fehlers wird offenbar $= 0$, d. h. der Fehler wird von einem constanten Theil frei sein. Der mittlere Werth des Quadrates $[E(t)]^2$, d. h. der mittlere Werth der Summe

$$\begin{aligned} f^2[E(x)]^2 &+ 2fg\,E(x)\,E(y) + 2fh\,E(x)\,E(z) + \text{etc.} \\ &+ g^2[E(y)]^2 + 2gh\,E(y)\,E(z) + \text{etc.} \\ &+ h^2[E(z)]^2 + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

wird aber nach den Ergebnissen des vorigen Art. gleich dem Produkte aus m^2p in die Summe

$$\begin{aligned} f^2[\alpha\alpha] &+ 2fg\,[\alpha\beta] + 2fh\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ &+ g^2[\beta\beta] + 2gh\,[\beta\gamma] + \text{etc.} \\ &+ h^2[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

oder gleich dem Produkte aus m^2p in den Werth der Funktion $\Omega - M$ sein, welcher durch die Substitutionen

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h \text{ etc.}$$

entsteht. Bezeichnen wir also diesen bestimmten Werth der Funktion $\Omega - M$ mit ω, so wird der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir an der Bestimmung $t = K$ festhalten, $= m\sqrt{p\omega}$, oder das Gewicht dieser Bestimmung $= \frac{1}{\omega}$ sein.

Da allgemein

$$\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \text{etc.}$$

ist, so muss ω auch dem bestimmten Werthe des Ausdrucks

$$(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h + \text{etc.},$$

d. h. dem bestimmten Werth von $t - K$ gleich sein, welcher sich ergiebt, wenn man den Variabeln x, y, z etc. diejenigen Werthe beilegt, welche den Werthen f, g, h etc. der ξ, η, ζ etc. entsprechen.

Endlich merken wir noch an, dass, wenn t in der Form einer Funktion der ξ, η, ζ etc. allgemein dargestellt wird, der constante Theil derselben nothwendig $= K$ wird. Wenn also allgemein

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

ist, so wird $\omega = fF + gG + hH + \text{etc.}$

30.

Die Funktion Ω erlangt, wie wir oben gesehen haben, ihren *absolut kleinsten* Werth M, wenn man $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., oder $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. setzt. Ist aber irgend einer dieser Grössen schon ein *anderer* Werth beigelegt, z. B. $x = A + \Delta$, so kann Ω durch Aenderungen der Uebrigen einen relativ kleinsten Werth erlangen, welcher offenbar mit Hülfe der Gleichungen

$$x = A + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

erhalten wird. Es muss deshalb $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. werden, und ferner, da ja

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc. ist}, \quad \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}.$$

Zugleich wird man haben:

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \quad z = C + \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}\Delta \text{ etc.}$$

Der relativ kleinste Werth des Ω wird aber

$$= [\alpha\alpha]\xi^2 + M = M + \frac{\Delta^2}{[\alpha\alpha]}.$$

Umgekehrt schliessen wir hieraus, dass, wenn der Werth des Ω eine vorgeschriebene Grenze $M + \mu^2$ nicht überschreiten soll, alsdann auch der Werth des x nothwendig in den Grenzen $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ und $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ liegen muss. Es verdient angemerkt zu werden,

dass $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ dem mittleren zu befürchtenden Fehler des plausibelsten Werthes von x gleich wird, wenn man $\mu = m\sqrt{p}$ setzt, d. h. wenn μ gleich dem mittleren Fehler solcher Beobachtungen ist, welche das Gewicht 1 besitzen.

Allgemeiner wollen wir den kleinsten Werth von Ω aufsuchen, welcher für einen gegebenen Werth von t eintreten kann, wenn t wie im vorigen Art. die lineare Funktion $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$ bezeichnet, und ihr plausibelster Werth $=$ K ist; jener vorgeschriebene Werth des t sei K $+ \varkappa$. Aus der Theorie der Maxima und Minima ist bekannt, dass die Lösung der Aufgabe aus den Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Theta\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \Theta\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Theta\frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

erhalten wird, d. h. aus $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc., wenn man mit Θ einen zunächst unbestimmten Faktor bezeichnet. Wenn wir also, wie in dem vorhergehenden Art., *allgemein*

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

setzen, so haben wir

$$\mathrm{K} + \varkappa = \Theta(f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}) + \mathrm{K}, \text{ oder}$$

$$\Theta = \frac{\varkappa}{\omega},$$

wo ω in derselben Bedeutung wie im vorigen Art. zu nehmen ist. Und da Ω — M im allgemeinen eine homogene Funktion zweiter Ordnung der Variabeln ξ, η, ζ etc. ist, so wird augenscheinlich ihr Werth für $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc. $= \Theta^2\omega$, und folglich der kleinste Werth, den Ω für $t = \mathrm{K} + \varkappa$ erhalten kann, gleich $\mathrm{M} + \Theta^2\omega = \mathrm{M} + \frac{\varkappa^2}{\omega}$ werden. Umgekehrt, wenn Ω irgend einen vorgeschriebenen Werth $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, so muss der Werth von t nothwendig in den Grenzen $\mathrm{K} - \mu\sqrt{\omega}$ und $\mathrm{K} + \mu\sqrt{\omega}$ enthalten sein, wo $\mu\sqrt{\omega}$ dem mittleren bei der plausibelsten Bestimmung von t zu befürchtenden Fehler gleich ist, wenn man μ als den mittleren Fehler der Beobachtungen annimmt, deren Gewicht $= 1$ ist.

31.

Wenn die Anzahl der Grössen x, y, z etc. etwas grösser ist, wird die numerische Bestimmung der Werthe A, B, C etc. aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. vermittelst der gewöhnlichen Elimination ziemlich lästig sein. Deshalb haben wir in der *Theorie der Bewegung der Himmelskörper*, Art. 182., auf einen eigenthümlichen Algorithmus hingewiesen, und denselben in der *Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas* (Comment. recent. Soc. Gotting. Vol. I) des weiteren entwickelt, durch welchen jene Arbeit, soweit es der Gegenstand erlaubt, thunlichst vereinfacht wird.

Die Funktion Ω ist nämlich auf folgende Form

$$\frac{u^{0\,2}}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + \text{M}$$

zu bringen, wo die Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. bestimmte Grössen, u^0, u', u'', u''' etc. aber lineare Funktionen von x, y, z etc. sind, von denen indess die zweite u' kein x, die dritte u'' kein x und kein y, die vierte u''' kein x, y und z, und so weiter, enthält, wonach die letzte $u^{(\pi-1)}$ nur noch von der letzten der Unbekannten x, y, z etc. abhängt; endlich sind die Coefficienten, mit denen x, y, z etc. bezw. in u^0, u', u'' etc. multiplicirt sind, bezw. den $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gleich. Alsdann hat man $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc. zu setzen, um die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. in umgekehrter Reihenfolge so bequem wie möglich abzuleiten. Es erscheint unnöthig, den Algorithmus selbst, durch welchen diese Transformation der Funktion Ω bewirkt wird, hier noch einmal zu wiederholen.

Aber eine noch viel weitläufigere Rechnung erfordert die unbestimmte Elimination, mit deren Hülfe man die Gewichte jener Bestimmungen aufzusuchen hat. Zwar das Gewicht der Bestimmung der letzten Unbekannten (welche allein in dem letzten $u^{(\pi-1)}$ vorkommt) wird nach dem, was in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ gelehrt ist, leicht gleich dem letzten Gliede in der Reihe der Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gefunden; deshalb haben sich einige Rechner, um jene lästige Elimination zu umgehen, in Ermangelung anderer Hülfsmittel, dazu entschlossen, den öfter erwähnten Algorithmus mit veränderter Reihenfolge der Grössen x, y, z etc. zu wiederholen, indem sie nach und nach den einzelnen Unbekannten den letzten Platz anwiesen. Wir hoffen deshalb auf den Dank der Mathematiker, wenn wir zur Berech-

nung der Gewichte der Bestimmungen eine neue, aus einer tieferen Analyse der Beweisführung geschöpfte Methode, welche nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen scheint, hier auseinander setzen.

32.

Nehmen wir also an, es sei

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^0 \\ u' &= \qquad\quad \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \qquad\qquad\qquad \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \qquad (1)$$

Hieraus folgt im allgemeinen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.} \\ &= \frac{u^0 du^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u' du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' du''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^0 \left(dx + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} dy + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} dz + \text{etc.} \right) \\ &\quad + u' \left(dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \text{etc.} \right) + u'' (dz + \text{etc.}) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus zu erschliessen

$$\begin{aligned} \xi &= u^0 \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \qquad (2)$$

Nehmen wir an, es ergäben sich hieraus die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} u^0 &= \xi \\ u' &= \mathrm{A}'\xi + \eta \\ u'' &= \mathrm{A}''\xi + \mathrm{B}''\eta + \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Von dem vollständigen Differential der Gleichung

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ziehen wir nunmehr die Gleichung

$$\frac{1}{2} d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.}$$

ab, und erhalten

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = (x - \mathrm{A})\,d\xi + (y - \mathrm{B})\,d\eta + (z - \mathrm{C})\,d\zeta + \text{etc.},$$

welcher Ausdruck mit dem übereinstimmen muss, der sich aus (3) ergiebt, nämlich mit

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\,d\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(\mathrm{A}'d\xi + d\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(\mathrm{A}''d\xi + \mathrm{B}''d\eta + d\zeta) + \text{etc.}$$

Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + \mathrm{A}'\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{A}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{A} \\ y &= \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{B}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{B} \\ z &= \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{C} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \qquad (4)$$

Wenn man in diese Ausdrücke für u^0, u', u'' etc. ihre aus (3) entnommenen Werthe einsetzt, so wird die unbestimmte Elimination erledigt sein. Und zwar erhält man zur Bestimmung der Gewichte

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{1}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathrm{A}'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{A}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{A}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\beta\beta] &= \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{B}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{B}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\gamma\gamma] &= \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{C}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \qquad (5)$$

Formeln, deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Uebrigens ergeben sich auch für die anderen Coefficienten $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. gleich einfache Formeln, welche wir indessen, da sie seltener gebraucht werden, hier beizufügen unterlassen.

33.

Wegen der Bedeutung des Gegenstandes, und um Alles für die Rechnung bereit zu stellen, wollen wir auch die expliciten Formeln zur Bestimmung der Coefficienten A′, A″, A‴ etc., B″, B‴ etc. etc. hierherschreiben. Diese Rechnung kann auf eine doppelte Weise geführt werden, da dieselben Gleichungen sich ergeben müssen, ob man nun die aus (3) entnommenen Werthe der u^0, u', u'' etc. in (2) einsetzt, oder die Werthe der ξ, η, ζ etc. aus (2) in (3). Die erste Rechnungsart liefert folgendes Formelsystem:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} + A' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} A'' + A''' = 0$$

etc., woraus A', A'', A''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

etc., woraus B'', B''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc., woraus C''' etc. gefunden werden. U. s. w.

Die andere Rechnungsart ergiebt folgende Formeln:

$$\mathfrak{A}^0 A' + \mathfrak{B}^0 = 0,$$

woraus A' erhalten wird,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A'' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' &= 0, \end{aligned}$$

woraus B'' und A'' erhalten werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A''' + \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}^0 C''' + \mathfrak{D}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' &= 0 \\ \mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' &= 0, \end{aligned}$$

woraus C''', B''', A''' erhalten werden. U. s. w.

Beide Rechnungsarten sind ungefähr gleich bequem, wenn die Gewichte sämmtlicher Bestimmungen x, y, z etc. verlangt werden; wird aber nur eine oder die andere der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. gesucht, so ist offenbar das erstere System weit vorzuziehen.

Uebrigens führt eine Combination der Gleichungen (1) mit (4) zu denselben Formeln und verhilft uns ausserdem zu einer doppelten Berechnung der plausibelsten Werthe von A, B, C etc. selbst, nämlich *erstens*

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathfrak{L}^0}{\mathfrak{A}^0} - \mathrm{A}'\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{A}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{A}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$\mathrm{B} = -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{B}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{B}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$\mathrm{C} = -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{C}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

etc.

Die andere Rechnung ist mit der gewöhnlichen identisch, bei der $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. gesetzt wird.

34.

Die Entwickelungen des Art. 32. sind indessen nur specielle Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, der folgendermaassen lautet:

Lehrsatz. Es bezeichne t folgende lineare Funktion der Variabeln x, y, z etc.

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

welche sich als Funktion der Variabeln u^0, u', u'' etc. in der Form

$$t = k^0u^0 + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

darstellt. Alsdann wird K der plausibelste Werth des t sein, und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0k^{02} + \mathfrak{B}'k'^2 + \mathfrak{C}''k''^2 + \text{etc.}}$$

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes folgt aus dem Umstande, dass der plausibelste Werth von t den Werthen $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. entsprechen muss. Zum Beweis des zweiten Theils bemerken wir, da

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc. und } dt = fdx + gdy + hdz + \text{etc.}$$

ist, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., unabhängig von den Werthen der Differentiale dx, dy, dz etc.,

$$d\Omega = 2dt$$

sein muss. Daraus folgt aber, dass für dieselben Werthe $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}du^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}du' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}du'' + \text{etc.} = k^0du^0 + k'du' + k''du'' + \text{etc.}$$

wird. Auch erkennt man leicht, wenn dx, dy, dz etc. von einander unabhängig sind, dass auch du^0, du', du'' etc. von einander unabhängig sein müssen; woraus wir entnehmen, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}' k', \quad u'' = \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.}$$

ist. Folglich wird der Werth von Ω, welcher zu denselben Werthen gehört,

$$= \mathfrak{A}^0 k^{0\,2} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \text{etc.} + \mathrm{M},$$

woraus nach Art. 29. sofort die Richtigkeit unseres Lehrsatzes folgt.

Wenn wir übrigens die Transformation der Funktion t unmittelbar, d. h. ohne Kenntniss der Substitutionen (4) des Art. 32., ausführen wollen, so stehen die Formeln zur Verfügung:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.,} \end{aligned}$$

woraus nach und nach die Coefficienten k^0, k', k'' etc. bestimmt werden, und sich endlich ergiebt:

$$\mathrm{K} = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}' k' - \mathfrak{L}'' k'' - \text{etc.}$$

35.

Einer besonderen Behandlung werth ist das folgende Problem, sowohl seiner praktischen Nützlichkeit, als seiner eleganten Lösung wegen:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch Hinzufügung einer neuen Gleichung bewirkt werden, ebenso wie die Gewichte der neuen Bestimmungen zu finden.

Wir behalten die oben benutzten Bezeichnungen bei, so dass die auf das Gewicht $= 1$ zurückgeführten, ursprünglichen Gleichungen die folgenden sind: $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., und die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 + \text{etc.} = \Omega$ ist; ferner seien ξ, η, ζ etc. die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz} \text{ etc.,}$$

und endlich möge aus der unbestimmten Elimination folgen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= \mathrm{B} + [\alpha\beta]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= \mathrm{C} + [\alpha\gamma]\,\xi + [\beta\gamma]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir nehmen nun an, eine (sehr nahe richtige, auf die Gewichtseinheit bezogene) neue Gleichung $v^* = 0$ trete hinzu, und wir wollen nachforschen, wie gross die hieraus hervorgehenden Aenderungen sowohl in den plausibelsten Werthen der Unbekannten A, B, C etc., als auch in den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. seien.

Wir setzen

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^* \text{ etc.}$$

und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$x = \mathrm{A}^* + [\alpha\alpha^*]\,\xi^* + [\alpha\beta^*]\,\eta^* + [\alpha\gamma^*]\,\zeta^* + \text{etc.}$$

Endlich sei

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

und durch Einsetzung der Werthe für x, y, z etc. nach (1) folge hieraus

$$v^* = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K};$$

sodann setze man

$$\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.} = \omega.$$

Offenbar wird K der plausibelste Werth der Funktion v^* sein, wie er sich aus den ursprünglichen Gleichungen ergiebt, ohne Rücksicht auf den Werth 0, welchen die hinzutretende Beobachtung geliefert hat, und $\frac{1}{\omega}$ wird das Gewicht dieser Bestimmung sein.

Wir haben nun

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

und deshalb

$$\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K} = v^*(1 + \mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.})$$

oder

$$v^* = \frac{\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}}{1 + \omega}.$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\quad - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.}) \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} - \mathrm{F}v^* \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\quad - \frac{\mathrm{F}}{1+\omega}(\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}). \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir demnach, dass

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

der plausibelste Werth des x aus *allen* Beobachtungen sein wird; und da ferner

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega},$$

so ist das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega}}.$$

Auf dieselbe Weise wird ferner der auf *allen* Beobachtungen beruhende plausibelste Werth des y gefunden

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \frac{G^2}{1+\omega}}$$

und so weiter. W. z. f. w.

Dieser Lösung mögen einige Bemerkungen beigefügt werden.

I. Durch Einsetzung dieser neuen Werthe A*, B*, C* etc. erhält die Funktion v^* den plausibelsten Werth

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}.$$

Und da allgemein

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

ist, so ergiebt sich nach den Principien des Art. 29. das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Dasselbe folgt unmittelbar aus der Anwendung der am Ende des Art. 22. gegebenen Regel; die Gruppe der ursprünglichen

Gleichungen würde nämlich die Bestimmung $v^* = \mathrm{K}$ mit dem Gewicht $\frac{1}{\omega}$ geliefert haben, sodann hätte die neue Beobachtung eine andere, von jener unabhängige Bestimmung $v^* = 0$ mit dem Gewichte $= 1$ gegeben, und durch Combinirung beider würde die Bestimmung $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ mit dem Gewichte $= \frac{1}{\omega} + 1$ folgen.

II. Hieraus folgt weiter, da für $x = \mathrm{A}^*$, $y = \mathrm{B}^*$, $z = \mathrm{C}^*$ etc. auch $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc. sein muss, dass für dieselben Werthe

$$\xi = -\frac{f\mathrm{K}}{1+\omega},\ \eta = -\frac{g\mathrm{K}}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{h\mathrm{K}}{1+\omega} \text{ etc.}$$

wird, und ferner, da allgemein

$$\Omega = \xi(x-\mathrm{A}) + \eta(y-\mathrm{B}) + \zeta(z-\mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ist,

$$\Omega = \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2}(\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.}) + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2},$$

und endlich, weil ja allgemein $\Omega^* = \Omega + v^{*2}$ ist,

$$\Omega^* = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} + \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} = \mathrm{M} + \frac{\mathrm{K}^2}{1+\omega}.$$

III. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit den im Art. 30. vorgetragenen, so bemerken wir, dass hier der kleinste Werth der Funktion Ω derjenige ist, welchen sie für den bestimmten Werth der Funktion $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ annehmen kann.

36.

Für das folgende, dem vorhergehenden ähnliche Problem:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch die Aenderung des Gewichts irgend einer der ursprünglichen Beobachtungen bewirkt werden, und ebenso die Gewichte der neuen Bestimmungen aufzusuchen.

soll hier nur die Lösung Platz finden, während wir den Beweis, welcher nach Analogie des vorigen Art. leicht geführt wird, der Kürze halber unterdrücken.

Nehmen wir an, es werde erst nach Vollendung der Rechnung bemerkt, dass man einer gewissen Beobachtung ein zu kleines oder zu grosses Gewicht beigelegt habe; z. B. habe man etwa der ersten,

welche V = L gegeben hat, an Stelle des in der Rechnung angewandten Gewichtes p richtiger das Gewicht p^* beizulegen. Alsdann wird es nicht nöthig sein, die ganze Rechnung zu wiederholen, sondern es lassen sich bequemer aus nachfolgenden Formeln Correctionen berechnen.

Die verbesserten plausibelsten Werthe der Unbekannten werden folgende sein

$$x = \mathrm{A} - \frac{(p^* - p)\,\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = \mathrm{B} - \frac{(p^* - p)\,\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = \mathrm{C} - \frac{(p^* - p)\,\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc., und die Gewichte dieser Bestimmungen werden gefunden, wenn man die Einheit bezw. durch

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\,\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\,\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\,\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \quad \text{etc.}$$

dividirt. Diese Lösung begreift auch den Fall in sich, wo man nach vollendeter Rechnung bemerkt, dass eine der Beobachtungen gänzlich zu verwerfen sei, da dies dasselbe ist, als wenn man $p^* = 0$ setzt; und ebenso entspricht der Werth $p^* = \infty$ dem Fall, wo die Gleichung V = L, welche in der Rechnung als angenähert behandelt worden war, in der That absolut genau ist.

Wenn übrigens zu den Gleichungen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt sind, *mehrere* neue hinzukommen, oder wenn man bemerkt, dass *mehreren* von ihnen irrige Gewichte beigelegt sind, so würde die Berechnung der Correctionen zu verwickelt werden; deshalb wird man in diesem Fall es vorziehen, die Rechnung von neuem zu beginnen.

37.

In den Art. 15., 16. haben wir eine Methode zu einer möglichst angenäherten Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen gegeben*). Diese Methode setzt aber voraus, es seien die wirklich

*) Eine Untersuchung über denselben Gegenstand, welchen wir in einer

begangenen Fehler hinlänglich zahlreich und genau bekannt, eine Voraussetzung, welche streng genommen sehr selten, oder sagen wir lieber nie, zutreffen wird. Wenn aber wenigstens die Grössen, deren angenäherte Werthe durch Beobachtungen ermittelt wurden, nach einem bekannten Gesetz von einer oder mehreren unbekannten Grössen abhängen, so lassen sich die plausibelsten Werthe der letzteren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen; und von den hieraus berechneten Werthen der Grössen, welche den Beobachtungen unterworfen waren, wird vorausgesetzt, da sie nunmehr sehr wenig von den wahren Werthen abweichen, so dass ihre Unterschiede gegen die beobachteten Werthe mit um so grösserem Rechte als wahre Beobachtungsfehler behandelt werden dürften, je grösser ihre Anzahl gewesen ist. Dieses Verfahren haben alle Rechner befolgt, welche a posteriori die Genauigkeit von Beobachtungen in bestimmt vorliegenden Fällen zu schätzen unternahmen: offenbar ist dasselbe aber theoretisch fehlerhaft, und obwohl es in vielen Fällen für den praktischen Gebrauch genügen mag, kann es gleichwohl in anderen stark irre führen. Deshalb ist dieser Gegenstand im höchsten Grade einer schärferen Analyse werth.

Wir werden bei dieser Untersuchung die vom Art. 19. ab angewandten Bezeichnungen beibehalten. Das eben erwähnte Verfahren behandelt die Grössen A, B, C etc. als wahre Werthe der x, y, z etc., und demnach die λ, λ', λ'' etc. als wahre Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. Wenn alle Beobachtungen gleiche Genauigkeit besitzen, und ihr Gewicht $p = p' = p''$ etc. als Einheit angenommen wird, so bedeuten die Grössen λ, λ', λ'' etc. mit entgegengesetzten Vorzeichen bei jener Voraussetzung die Beobachtungsfehler selbst, welche nach den Vorschriften des Art. 15. den mittleren Fehler m der Beobachtungen

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

ergeben. Ist die Genauigkeit der Beobachtungen verschieden, so würden die Grössen $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. die Beobachtungsfehler multiplicirt mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten darstellen,

früheren Abhandlung (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften.* Bd. I, S. 185) veröffentlicht haben, war auf dieselbe Hypothese in Betreff des Charakters der Funktion, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit ausdrückt, begründet, auf welcher wir auch in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ die Methode der kleinsten Quadrate aufgebaut hatten (s. Art. 9., III).

und die Vorschriften des Art. 16. würden zu der nämlichen Formel $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ führen, welche schon den mittleren Fehler solcher Beobachtungen ausdrückt, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird. Offenbar würde aber eine strenge Rechnung erfordern, dass an Stelle der Grössen λ, λ', λ'' etc. die aus den wahren Werthen von x, y, z etc. sich ergebenden Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. gebraucht werden, d. h. an Stelle von M der den wahren Werthen von x, y, z etc. entsprechende Werth der Funktion Ω. Obgleich dieser nun nicht angegeben werden kann, sind wir dennoch sicher, dass er grösser als M sei (da M der kleinste mögliche Werth ist), den höchst unwahrscheinlichen Fall ausgenommen, dass die plausibelsten Werthe der Unbekannten mit den wahren genau übereinstimmen. Im allgemeinen können wir also versichern, dass das gewöhnliche Verfahren einen gewiss zu kleinen mittleren Fehler ergiebt, oder dass den Beobachtungen eine allzugrosse Genauigkeit beigelegt wird. Wir wollen jetzt zusehen, was die strenge Theorie lehrt.

38.

Vor allem muss man untersuchen, wie M von den wahren Beobachtungsfehlern abhängt. Diese bezeichnen wir, wie im Art. 28., mit e, e', e'' etc., und setzen der grösseren Einfachheit wegen

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc.}$$

und ebenso

$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} = \text{etc.} = \mu.$$

Es seien ferner die wahren Werthe der x, y, z etc. bezw. $A - x^0$, $B - y^0$, $C - z^0$ etc., und diesen mögen als Werthe der ξ, η, ζ etc. bezw. entsprechen $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Offenbar entsprechen denselben als Werthe der v, v', v'' etc. bezw. $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., so dass man hat

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
\eta^0 &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
\zeta^0 &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc., sowie

$$\begin{aligned}
x^0 &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
y^0 &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.}\\
z^0 &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Endlich setzen wir

$$\Omega^0 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.},$$

so dass Ω^0 der Werth der Funktion Ω ist, welcher den wahren Werthen der x, y, z etc. entspricht. Da man allgemein hat

$$\Omega = \mathrm{M} + (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \text{etc.},$$

so wird hiernach

$$\mathrm{M} = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

sein. Hieraus folgt offenbar, dass M sich als homogene Funktion zweiten Grades der Fehler e, e', e'' etc. entwickeln lässt, welche für verschiedene Werthe der Fehler grösser oder kleiner werden kann. So lange uns aber die Grösse der Fehler unbekannt bleibt, wird man diese Funktion bei der Untersuchung unbestimmt lassen, und vor allem ihren mittleren Werth nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen suchen. Diesen werden wir finden, wenn wir an Stelle der Quadrate e^2, e'^2, e''^2 etc. bezw. m^2, m'^2, m''^2 etc. setzen, die Produkte ee', ee'', $e'e''$ etc. aber überhaupt weglassen, oder, was dasselbe ist, wenn wir an Stelle eines jeden Quadrates ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. μ^2 schreiben und die Produkte $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. vernachlässigen. Auf diese Weise entsteht aus dem Gliede Ω^0 offenbar $\pi\mu^2$; das Glied $-x^0\xi^0$ geht in

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^2 = -\mu^2$$

über, und analog geben die übrigen einzelnen Theile $-\mu^2$, so dass der mittlere totale Werth $= (\pi - \varrho)\,\mu^2$ wird, wenn π die Anzahl der Beobachtungen und ϱ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet. Der wahre Werth des M kann zwar, je nach den zufälligen Fehlern, grösser oder kleiner als der mittlere werden, der Unterschied aber wird von um so geringerer Bedeutung sein, je grösser die Anzahl der Beobachtungen gewesen ist, so dass man als angenäherten Werth des μ

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}}$$

nehmen darf. Der Werth für μ, welcher sich aus der im vorigen Art. besprochenen irrthümlichen Praxis ergiebt, muss deshalb im Verhältniss der Grösse $\sqrt{\pi - \varrho}$ zu $\sqrt{\pi}$ vergrössert werden.

39.

Um noch deutlicher zu zeigen, mit wie grossem Rechte man einen zufälligen Werth des M dem mittleren gleich setzen darf, muss man den mittleren zu befürchtenden Fehler suchen, wenn $\frac{M}{\pi - \varrho} = \mu^2$ gesetzt wird. Jener mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Grösse

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2}{\pi - \varrho}\right)^2,$$

der wir die Gestalt geben wollen

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.}}{\pi - \varrho}\right)^2$$

$$- \frac{2\,\mu^2}{\pi - \varrho}\,[\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2] - \mu^4;$$

da offenbar der mittlere Werth des zweiten Gliedes $= 0$ wird, so verwandelt sich unsere Frage in die nach dem mittleren Werthe der Funktion

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.})^2.$$

Ist dieser gefunden, und bezeichnet man ihn mit N, so wird der gesuchte mittlere Fehler

$$= \sqrt{\frac{N}{(\pi - \varrho)^2} - \mu^4}.$$

Der Ausdruck Ψ lässt sich offenbar als homogene Funktion entweder der Fehler e, e', e'' etc. oder auch der Grössen ε, ε', ε'' etc. entwickeln, und sein mittlerer Werth wird gefunden, wenn

1. für die Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. ihre mittleren Werthe gesetzt werden,

2. für die einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten, wie $e^2e'^2$, $e^2e''^2$, $e'^2e''^2$ etc. die Produkte aus ihren mittleren Werthen, nämlich $m^2m'^2$, $m^2m''^2$, $m'^2m''^2$ etc. gesetzt werden,

3. die übrigen Glieder aber, welche entweder einen Faktor von der Form e^3e', oder von der Form $e^2e'e''$ enthalten, ganz fortgelassen werden. Die mittleren Werthe der Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. nehmen wir proportional den Biquadraten m^4, m'^4, m''^4 etc. an (siehe Art. 16.), so dass sich jene zu diesen wie ν^4 zu μ^4 verhalten, wo ν^4 also den mittleren Werth der Biquadrate solcher Beobachtungen bezeichnet, deren Gewicht $= 1$ ist. Demnach können die obigen Vorschriften auch so ausgedrückt werden: An Stelle der

einzelnen Biquadrate ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. ist ν^4 zu schreiben, an Stelle der einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten wie $\varepsilon^2\varepsilon'^2$, $\varepsilon^2\varepsilon''^2$, $\varepsilon'^2\varepsilon''^2$ etc. ist μ^4 zu schreiben, alle übrigen Glieder aber, die Faktoren wie $\varepsilon^3\varepsilon'$ oder $\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon''$ oder $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ enthalten, sind wegzulassen.

Hat man dieses genau begriffen, so findet man leicht:

I. Der mittlere Werth des Quadrates $\Omega^{0\,2}$ ist $\pi\nu^4 + (\pi^2 - \pi)\mu^4$.

II. Der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon^2 x^0 \xi^0$ wird

$$= a\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^4$$

oder, da $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$ ist,

$$= a\alpha\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4.$$

Und da der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon'^2 x^0 \xi^0$ ebenso

$$= a'\alpha'\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

wird, der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon''^2 x^0 \xi^0$ aber

$$= a''\alpha''\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

ist u. s. w., so wird offenbar der mittlere Werth des Produktes $(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.})\, x^0\xi^0$ oder von $\Omega^0 x^0 \xi^0$

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

sein. Denselben mittleren Werth haben die Produkte $\Omega^0 y^0 \eta^0$, $\Omega^0 z^0 \zeta^0$ etc. Folglich wird der mittlere Werth des Produktes $\Omega^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= \varrho\nu^4 + \varrho\,(\pi - 1)\,\mu^4.$$

III. Damit die noch übrigen Entwickelungen nicht zu verwickelt werden, soll eine zweckmässige Bezeichnung eingeführt werden. Wir gebrauchen zu dem Zweck das Zeichen Σ in einem etwas weiteren Sinne, als dies oben vorübergehend geschehen ist, so dass es eine Summe bezeichnet, bestehend aus dem Gliede, dem es vorgesetzt, und allen ähnlichen aber nicht identischen Gliedern, welche aus ihm durch alle Permutationen der Beobachtungen entspringen. Hiernach ist z. B. $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^{0\,2} = \Sigma\alpha^2\varepsilon^2 + 2\,\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Setzt man dann den mittleren Werth des Produktes $x^{0\,2}\xi^{0\,2}$ gliedweise zusammen, so erhält man erstens den mittleren Werth des Produktes $\alpha^2\varepsilon^2\xi^{0\,2}$

$$= a^2\alpha^2\nu^4 + \alpha^2\,(a'^2 + a''^2 + \text{etc.})\,\mu^4$$
$$= a^2\alpha^2\,(\nu^4 - \mu^4) + \alpha^2\mu^4\Sigma a^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha'^2\varepsilon'^2\xi^{0\,2}$ wird ebenso

$= a'^2\alpha'^2(\nu^4 - \mu^4) + \alpha'^2\mu^4\Sigma a^2$ u. s. w., und deshalb der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha^2\varepsilon^2$

$$= (\nu^4 - \mu^4)\Sigma a^2\alpha^2 + \mu^4\Sigma a^2\Sigma\alpha^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^{02}$ wird weiter

$$= 2\,\alpha\alpha' a a'\mu^4,$$

und der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^{02}$ ebenso

$$= 2\alpha\alpha'' a a''\mu^4 \text{ etc.},$$

woraus leicht zu schliessen ist, dass der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ sich

$$= 2\,\mu^4\,\Sigma\alpha a \alpha' a' = \mu^4\left[(\Sigma a\alpha)^2 - \Sigma a^2\alpha^2\right] = \mu^4(1 - \Sigma a^2\alpha^2)$$

ergiebt. Wenn wir dies zusammenfassen, so erhalten wir den mittleren Werth des Produktes $x^{02}\xi^{02}$

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\Sigma a^2\alpha^2 + 2\,\mu^4 + \mu^4\,\Sigma a^2\Sigma\alpha^2.$$

IV. Ganz ähnlich findet man den mittleren Werth des Produktes $x^0y^0\xi^0\eta^0$

$$= \nu^4\,\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\,\Sigma a\alpha\, b'\beta' + \mu^4\,\Sigma ab\,\alpha'\beta' + \mu^4\,\Sigma a\beta\, b'\alpha'.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\Sigma a\alpha b'\beta' &= \Sigma a\alpha\,\Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta\\
\Sigma ab\alpha'\beta' &= \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta\\
\Sigma a\beta b'\alpha' &= \Sigma a\beta\,\Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha,
\end{aligned}$$

woraus sich jener mittlere Werth, weil $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$ ist,

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\,(1 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta)$$

ergiebt.

V. Da ferner der mittlere Werth des Produktes $x^0\,z^0\,\xi^0\,\zeta^0$ auf dieselbe Weise

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4\,(1 + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma)$$

wird, u. s. w., so ergiebt sich durch Summirung der mittlere Werth des Produktes $x^0\xi^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$\begin{aligned}
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 1)\,\mu^4\\
&\quad + \mu^4\,(\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma + \text{etc.})\\
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4.
\end{aligned}$$

VI. Ferner wird auf dieselbe Weise der mittlere Werth des Produktes $y^0\eta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ gefunden

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\mu^4,$$

sodann der mittlere Werth des Produktes $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\mu^4$$

u. s. w. Hieraus folgt durch Addition der mittlere Werth des Quadrates $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] + (\varrho^2 + 2\varrho)\mu^4.$$

VII. Durch sorgfältige Addition aller Glieder ergiebt sich endlich

$$\begin{aligned} \text{N} &= (\pi - 2\varrho)\nu^4 + (\pi^2 - \pi - 2\pi\varrho + 4\varrho + \varrho^2)\mu^4 \\ &\quad + (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] \\ &= (\pi - \varrho)(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \varrho)^2\mu^4 \\ &\quad - (\nu^4 - 3\mu^4)\,\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\}. \end{aligned}$$

Daher wird der mittlere zu befürchtende Fehler von μ^2, wenn die Formel

$$\mu^2 = \frac{\text{M}}{\pi - \varrho}$$

angewendet wird,

$$= \sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \varrho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\right\}}.$$

40.

Die Grösse $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$, welche in den soeben gefundenen Ausdruck eingeht, kann zwar im allgemeinen nicht auf eine einfachere Form gebracht werden; nichtsdestoweniger lassen sich zwei Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth nothwendig liegen muss. *Erstens* nämlich lässt sich aus den oben entwickelten Relationen leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} &(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \text{etc.})^2 \\ &+ (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.} = a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus wir schliessen, dass $a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$ eine positive Grösse und kleiner (wenigstens nicht grösser) als die Einheit ist. Dasselbe gilt von der Grösse $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.}$, welche ja der Summe $(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$ gleich gefunden wird; ebenso wird $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ kleiner als Eins sein, u. s. w. Hiernach

ist $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ nothwendig kleiner als π. *Zweitens* hat man $\Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}) = \varrho$, da ja $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma c\gamma = 1$ etc., woraus leicht geschlossen wird, dass die Summe der Quadrate $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ grösser als $\frac{\varrho^2}{\pi}$, oder wenigstens nicht kleiner sei. Daher liegt das Glied

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\right\}$$

nothwendig zwischen den Grenzen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}\frac{\varrho}{\pi}$, oder, wenn wir weitere Grenzen vorziehen, zwischen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$, und hiernach das Quadrat des mittleren zu befürchtenden Fehlers für den Werth von $\mu^2 = \frac{M}{\pi - \varrho}$ in den Grenzen $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{2\mu^4}{\pi - \varrho}$, so dass man jedwede Genauigkeit erreichen kann, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen hinreichend gross gewesen ist.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bei derjenigen Hypothese (Art. 9., III), auf welche die Theorie der kleinsten Quadrate früher begründet worden war, jenes Glied ganz wegfällt, und dass, ebenso wie man zur Ermittelung eines angenäherten Werthes μ des mittleren Fehlers der Beobachtungen in allen Fällen die Summe

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = M$$

so behandeln muss, als wenn sie die Summe von $\pi - \varrho$ zufälligen Fehlern wäre, gerade so bei jener Hypothese auch die Genauigkeit selbst dieser Bestimmung derjenigen gleich wird, welche nach den Ergebnissen des Art. 15. der Bestimmung aus $\pi - \varrho$ wahren Fehlern zukommt.

Ergänzung zur Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1826, Sept. 16.)

1.

In der Abhandlung über die Theorie der Combination der Beobachtungen, welche im 5. Bande der „Commentationes recentiores" abgedruckt ist, haben wir angenommen, die Grössen, deren Werthe durch nicht völlig genaue Beobachtungen gegeben sind, seien von gewissen unbekannten Elementen so abhängig, dass sie in Form von gegebenen Funktionen dieser Elemente dargestellt seien, und es komme hauptsächlich darauf an, diese Elemente so genau als möglich aus den Beobachtungen abzuleiten.

In den meisten Fällen ist jene Annahme freilich unmittelbar zutreffend. In anderen Fällen aber tritt uns die Aufgabe in ein wenig anderer Gestalt entgegen, so dass es auf den ersten Anblick zweifelhaft erscheint, wie man sie auf die verlangte Form zurückführen könne. Es kommt nämlich nicht selten vor, dass die Grössen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen, noch nicht in der Form von Funktionen bestimmter Elemente ausgedrückt sind und auch nicht auf eine solche Form zurückführbar erscheinen, wenigstens nicht bequem oder nicht ohne Umschweife; während andererseits die Natur des Gegenstandes gewisse Bedingungen liefert, denen die wahren Werthe der beobachteten Grössen in aller Strenge genügen müssen.

Wenn man aber genauer zusieht, so bemerkt man leicht, dass dieser Fall sich von dem früheren in der That nicht wesentlich unterscheidet, sondern auf ihn zurückgeführt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit π die Anzahl der beobachteten Grössen, mit σ aber die Anzahl der Bedingungsgleichungen, und wählt man von den ersteren nach Belieben $\pi - \sigma$ aus, so steht nichts im Wege,

gerade diese als Elemente anzunehmen und die übrigen, deren Anzahl σ sein wird, mit Hülfe der Bedingungsgleichungen als Funktionen von jenen zu betrachten, wodurch die Aufgabe auf unsere Voraussetzung zurückgeführt ist.

Wenn nun aber auch dieser Weg in sehr vielen Fällen thatsächlich bequem genug zum Ziele führt, so lässt sich doch nicht leugnen, dass er nicht ganz natürlich ist, und dass es demnach die Mühe lohnt, die Aufgabe in dieser anderen Form gesondert zu behandeln, und zwar um so mehr, als sie eine sehr elegante Lösung erlaubt. Ja man darf sogar sagen: Da diese neue Lösung zu kürzeren Rechnungen, als die Lösung der Aufgabe im früheren Zustande führt, wenn σ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn die in der früheren Abhandlung mit ϱ bezeichnete Anzahl der Elemente grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird man die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte neue Lösung in diesem Fall auch dann noch der früheren vorzuziehen haben, wenn man die Bedingungsgleichungen aus der Natur des Problems ohne Umschweife wegschaffen kann.

2.

Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die Grössen, in der Anzahl π, deren Werthe durch Beobachtung zu unserer Kenntniss kommen; es hänge nun eine unbekannte Grösse von jenen so ab, dass sie durch eine gegebene Funktion u derselben ausgedrückt sei; es seien ferner l, l', l'' etc. die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{du}{dv},\ \frac{du}{dv'},\ \frac{du}{dv''}\ \text{etc.},$$

welche den wahren Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen. Ebenso wie nun durch Einsetzen dieser wahren Werthe in die Funktion u ihr wahrer Werth hervorgeht, so erhält man, wenn man für v, v', v'' etc. Werthe einsetzt, welche von den wahren bezw. um die Fehler e, e', e'' etc., unterschieden sind, einen fehlerhaften Werth der Unbekannten, dessen Fehler

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

gesetzt werden kann, wenn nur, was wir stets annehmen, die Fehler e, e', e'' etc. so klein sind, dass (für eine nicht lineare Funktion u) ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Obwohl nun die Grösse der Fehler e, e', e'' etc. unbestimmt bleibt, kann man doch die einer solchen Bestimmung der

Unbekannten anhaftende Unsicherheit allgemein schätzen, und zwar durch den mittleren bei einer solchen Bestimmung zu befürchtenden Fehler, der nach den Principien der früheren Abhandlung

$$= \sqrt{l^2m^2 + l'^2m'^2 + l''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

wird, wenn m, m', m'' etc. die mittleren Fehler der Beobachtungen bezeichnen, oder wenn die einzelnen Beobachtungen mit derselben Unsicherheit behaftet sind,

$$= m\sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \text{etc.}}\ .$$

Offenbar darf man bei dieser Rechnung für l, l', l'' etc. mit gleichem Recht auch die Werthe der Differentialquotienten nehmen, welche den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen.

3.

Sind die Grössen v, v', v'' etc. vollständig unabhängig von einander, so kann die Unbekannte nur auf eine einzige Weise durch sie bestimmt werden; es kann deshalb jene Unsicherheit alsdann auf keine Weise weder vermieden noch verringert werden, und bei der Ableitung des Werthes der Unbekannten aus den Beobachtungen ist jede Willkür ausgeschlossen.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn zwischen den Grössen v, v', v'' etc. eine gegenseitige Abhängigkeit besteht, welche wir durch σ Bedingungsgleichungen

$$X = 0,\ \ Y = 0,\ \ Z = 0 \text{ etc.}$$

ausgedrückt annehmen wollen, wo X, Y, Z etc. gegebene Funktionen der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnen. In diesem Falle kann man unsere Unbekannte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Combinationen der Grössen v, v', v'' etc. bestimmen, da man an Stelle der Funktion u offenbar irgend eine andere U annehmen kann, welche so beschaffen ist, dass $U - u$ identisch verschwindet, wenn man $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. setzt.

Bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall würde sich so zwar kein Unterschied in Bezug auf den Werth der Unbekannten ergeben, wenn die Beobachtungen völlig genau wären; insofern diese aber Fehlern unterworfen sind, würde offenbar im allgemeinen jede einzelne Combination einen anderen Werth der Unbekannten hervorbringen. So erhalten wir an Stelle des Fehlers

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.},$$

welcher der Funktion u zugehört hatte, für die Funktion U den Fehler

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.},$$

wo die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dU}{dv}$, $\frac{dU}{dv'}$, $\frac{dU}{dv''}$ etc. bezw. mit L, L′, L″ etc. bezeichnet sind. Obwohl wir nun die Fehler selbst nicht angeben können, so werden sich doch die mittleren bei den verschiedenen Combinationen der Beobachtungen zu befürchtenden Fehler mit einander vergleichen lassen; und die beste Combination wird die sein, bei der dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird. Da dieser

$$= \sqrt{L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

ist, so wird man darauf hinwirken müssen, dass die Summe $L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}$ den kleinsten Werth erhält.

4.

Da die unendliche Mannigfaltigkeit von Funktionen U, welche unter der im vorigen Art. angegebenen Bedingung an die Stelle von u treten können, hier nur insofern zu betrachten ist, als sich hieraus verschiedene Werthsysteme der Coefficienten L, L′, L″ etc. ergeben, so muss man vor allem den Zusammenhang aufsuchen, welcher zwischen sämmtlichen zulässigen Systemen statthaben muss. Bezeichnen wir die bestimmten Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dv}, \frac{dX}{dv'}, \frac{dX}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dY}{dv}, \frac{dY}{dv'}, \frac{dY}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dZ}{dv}, \frac{dZ}{dv'}, \frac{dZ}{dv''} \text{ etc. etc.}$$

für den Fall, dass den v, v', v'' etc. ihre wahren Werthe beigelegt werden, bezw. mit

$$a, a', a'' \text{ etc.}$$
$$b, b', b'' \text{ etc.}$$
$$c, c', c'' \text{ etc. etc.},$$

so folgt, wenn man die v, v', v'' etc. solche Zuwachse dv, dv', dv'' etc. annehmen lässt, durch welche X, Y, Z etc. nicht geändert werden und deshalb einzeln $= 0$ bleiben, d. h. welche den Gleichungen

$$0 = adv + a'dv' + a''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = bdv + b'dv' + b''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = cdv + c'dv' + c''dv'' + \text{etc. etc.}$$

genügen, dass sich auch $u - U$ nicht ändern darf, und daher auch

$$0 = (l - L)\,dv + (l' - L')\,dv' + (l'' - L'')\,dv'' + \text{etc.}$$

werden wird. Hieraus schliesst man leicht, dass die Coefficienten L, L′, L″ etc. in folgenden Formeln

$$L = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$L' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$L'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc. etc.}$$

enthalten sein müssen, wo x, y, z etc. bestimmte Multiplicatoren bezeichnen. Umgekehrt leuchtet ein, wenn ein System von bestimmten Multiplicatoren x, y, z etc. beliebig angenommen wird, dass man stets eine solche Funktion U angeben kann, welcher den obigen Gleichungen genügende Werthe von L, L′, L″ etc. entsprechen, und welche der Bedingung des vorigen Art. gemäss die Funktion u ersetzen kann; ja dass man dies auf unendlich verschiedene Weisen erreichen kann. Der einfachste Fall wird der sein, dass man $U = u + xX + yY + zZ + \text{etc.}$ setzt; allgemeiner darf man setzen $U = u + xX + yY + zZ + \text{etc.} + u'$, wo u' eine solche Funktion der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnet, welche für $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. immer verschwindet, und deren Werth in dem betreffenden bestimmten Fall ein Maximum oder Minimum wird. Aber für unseren Zweck erwächst daraus kein Unterschied.

5.

Es wird nunmehr leicht sein, den Multiplicatoren x, y, z etc. solche Werthe zu geben, dass die Summe

$$L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält. Offenbar ist hierzu eine vollkommene Kenntniss der mittleren Fehler m, m', m'' etc. nicht nothwendig, sondern es genügt ihr gegenseitiges Verhältniss. Wir führen deshalb an Stelle derselben die Gewichte der Beobachtungen p, p', p'' etc. ein, d. h. Zahlen, welche den Quadraten m^2, m'^2, m''^2 etc. umgekehrt proportional sind, wobei das Gewicht irgend einer Beobachtung willkürlich gleich der Einheit angenommen wird. Die Grössen

x, y, z etc. müssen daher so bestimmt werden, dass das allgemeine Polynom

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält, was für die *bestimmten* Werthe x^0, y^0, z^0 etc. der Fall sein möge.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\frac{a^2}{p} + \frac{a'^2}{p'} + \frac{a''^2}{p''} + \text{etc.} = [aa]$$
$$\frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \text{etc.} = [ab]$$
$$\frac{ac}{p} + \frac{a'c'}{p'} + \frac{a''c''}{p''} + \text{etc.} = [ac]$$
$$\frac{b^2}{p} + \frac{b'^2}{p'} + \frac{b''^2}{p''} + \text{etc.} = [bb]$$
$$\frac{bc}{p} + \frac{b'c'}{p'} + \frac{b''c''}{p''} + \text{etc.} = [bc]$$
$$\frac{c^2}{p} + \frac{c'^2}{p'} + \frac{c''^2}{p''} + \text{etc.} = [cc]$$

etc., und ferner

$$\frac{al}{p} + \frac{a'l'}{p'} + \frac{a''l''}{p''} + \text{etc.} = [al]$$
$$\frac{bl}{p} + \frac{b'l'}{p'} + \frac{b''l''}{p''} + \text{etc.} = [bl]$$
$$\frac{cl}{p} + \frac{c'l'}{p'} + \frac{c''l''}{p''} + \text{etc.} = [cl]$$

etc.,

so erfordert die Bedingung eines Minimum offenbar, dass wird

$$\left.\begin{array}{l} 0 = [aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] \\ 0 = [ab]\,x^0 + [bb]\,y^0 + [bc]\,z^0 + \text{etc.} + [bl] \\ 0 = [ac]\,x^0 + [bc]\,y^0 + [cc]\,z^0 + \text{etc.} + [cl] \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Sind die Grössen x^0, y^0, z^0 etc. durch Elimination hieraus abgeleitet, so setze man

$$\left.\begin{aligned} a x^0 + b y^0 + c z^0 + \text{etc.} + l &= \text{L} \\ a' x^0 + b' y^0 + c' z^0 + \text{etc.} + l' &= \text{L}' \\ a'' x^0 + b'' y^0 + c'' z^0 + \text{etc.} + l'' &= \text{L}'' \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Alsdann wird die zur Bestimmung unserer Unbekannten zweckmässigste und der geringsten Unsicherheit unterworfene Funktion der Grössen v, v', v'' etc. die sein, deren partielle Differentialquotienten in dem betreffenden bestimmten Fall bezw. die Werthe L, L′, L″ etc. haben, und das Gewicht dieser Bestimmung, welches wir mit P bezeichnen wollen, wird

$$= \frac{1}{\frac{\text{L}^2}{p} + \frac{\text{L}'^2}{p'} + \frac{\text{L}''^2}{p''} + \text{etc.}} \quad (3)$$

sein, oder $\frac{1}{\text{P}}$ wird der Werth des oben angeführten Polynoms für dasjenige Werthsystem der Grössen x, y, z etc. sein, welches den Gleichungen (1) Genüge leistet.

6.

Im vorhergehenden Art. lehrten wir diejenige Funktion U kennen, welche zur zweckmässigsten Bestimmung unserer Unbekannten verhilft; nun wollen wir sehen, welchen *Werth* die Unbekannte auf diese Weise erlangt. Es werde dieser Werth mit K bezeichnet, welcher demnach entsteht, wenn man in U die beobachteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. einsetzt; für dieselbe Substitution erhalte die Funktion u den Werth k; endlich sei $\varkappa$ der wahre Werth der Unbekannten, wie er also durch die Substitution der wahren Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten werden würde, wenn man eine solche in U oder u ausführen könnte. Hiernach wird mithin

$$\begin{aligned} k &= \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.} \\ \text{K} &= \varkappa + \text{L}e + \text{L}'e' + \text{L}''e'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

und ferner

$$\text{K} = k + (\text{L} - l)\, e + (\text{L}' - l')\, e' + (\text{L}'' - l'')\, e'' + \text{etc.}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\text{L} - l$, $\text{L}' - l'$, $\text{L}'' - l''$ etc. ihre Werthe aus (2), und bezeichnet

$$\left.\begin{aligned} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

etc., so hat man

$$K = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 + \text{etc.} \tag{5}$$

Die Werthe der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. kann man nun freilich nach den Formeln (4) nicht berechnen, da die Fehler e, e', e'' etc. unbekannt bleiben; aber es ist von selber klar, dass jene nichts anderes sind, als die Werthe der Funktionen X, Y, Z etc., welche sich ergeben, wenn man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt. Sonach bildet das System der Gleichungen (1), (3), (5) die vollständige Lösung unserer Aufgabe, da unsere am Ende des Art. 2. gegebenen Vorschriften über die Berechnung der Grössen l, l', l'' etc. aus den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. offenbar mit gleichem Rechte auf die Berechnung der Grössen a, a', a'' etc., b, b', b'' etc. ausgedehnt werden dürfen.

7.

An Stelle der Formel (3), welche das Gewicht der plausibelsten Bestimmung ausdrückt, lassen sich noch einige andere finden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird.

Zunächst bemerken wir, dass durch Multiplication der Gleichungen (2) bezw. mit $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. und durch Addition erhalten wird

$$[aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Die linke Seite wird $= 0$, die rechte bezeichnen wir der Analogie gemäss mit $[aL]$, und erhalten so

$$[aL] = 0, \text{ und weiter ebenso } [bL] = 0, \ [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Ferner finden wir, wenn wir die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{L}{p}$, $\frac{L'}{p'}$, $\frac{L''}{p''}$ etc. multipliciren und addiren

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \text{etc.},$$

und erhalten so einen *zweiten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}.$$

Multipliciren wir endlich die Gleichungen (2) der Reihe nach

mit $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}$ etc. und addiren, so gelangen wir zum *dritten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{[al]\,x^0 + [bl]\,y^0 + [cl]\,z^0 + \text{etc.} + [ll]},$$

wenn wir nach Analogie der übrigen Bezeichnungen

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

setzen. Hiernach gehen wir mit Hülfe der Gleichungen (1) leicht zum *vierten* Ausdruck über, den wir folgendermaassen schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [ll] - [aa]\,x^{0\,2} - [bb]\,y^{0\,2} - [cc]\,z^{0\,2} - \text{etc.}\\ - 2[ab]\,x^0y^0 - 2[ac]\,x^0z^0 - 2[bc]\,y^0z^0 - \text{etc.}\end{aligned}$$

8.

Die allgemeine Lösung, die wir bis jetzt gaben, ist besonders auf den Fall eingerichtet, dass nur *eine* von den beobachteten Grössen abhängige Unbekannte zu bestimmen ist. Wenn aber die plausibelsten Werthe mehrerer von denselben Beobachtungen abhängiger Unbekannten in Frage stehen, oder wenn es noch ungewiss ist, welche Unbekannten man vor allem aus den Beobachtungen ableiten soll, dann verfährt man mit ihnen besser auf eine andere Weise, welche wir nun entwickeln wollen.

Wir betrachten die Grössen x, y, z etc. als Variable und setzen

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \text{etc.} &= \xi\\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \text{etc.} &= \eta\\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \text{etc.} &= \zeta\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

etc., und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= x\\ [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= y\\ [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

etc.

Vor allem ist hier zu bemerken, dass die symmetrisch stehenden Coefficienten nothwendig einander gleich sind, also

$$
\begin{aligned}
[\beta\alpha] &= [\alpha\beta] \\
[\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma] \\
[\gamma\beta] &= [\beta\gamma] \\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

was sich zwar schon aus der allgemeinen Theorie der Elimination aus linearen Gleichungen von selber ergiebt, ausserdem aber später auch noch einmal direkt von uns bewiesen werden soll.

Wir erhalten also

$$
\left.\begin{aligned}
x^0 &= -[\alpha\alpha][al] - [\alpha\beta][bl] - [\alpha\gamma][cl] - \text{etc.} \\
y^0 &= -[\alpha\beta][al] - [\beta\beta][bl] - [\beta\gamma][cl] - \text{etc.} \\
z^0 &= -[\alpha\gamma][al] - [\beta\gamma][bl] - [\gamma\gamma][cl] - \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$
$$\text{etc.}$$

und hieraus, wenn wir

$$
\left.\begin{aligned}
[\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{A} \\
[\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{B} \\
[\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{C}
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - \mathrm{A}[al] - \mathrm{B}[bl] - \mathrm{C}[cl] - \text{etc.}$$

oder, wenn wir ausserdem

$$
\left.\begin{aligned}
a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} &= p\varepsilon \\
a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} &= p'\varepsilon' \\
a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} &= p''\varepsilon''
\end{aligned}\right\} \quad (10)
$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \quad (11)$$

9.

Eine Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) lehrt, dass die Hülfsgrössen A, B, C etc. diejenigen Werthe der Variabeln x, y, z etc. sind, welche den Werthen $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. der Variabeln ξ, η, ζ etc. entsprechen; woraus folgt, dass man

$$
\left.\begin{aligned}
[aa]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [ac]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\
[ab]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [bc]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\
[ac]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [cc]\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

etc. erhält. Multiplicirt man also die Gleichungen (10) bezw. mit $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$ etc. und addirt, so erhält man

und analog weiter
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \mathfrak{B} &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.} \\ \mathfrak{C} &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

etc. Da nun $\mathfrak{A}$ der Werth der Funktion X ist, falls man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt, so sieht man leicht, dass, wenn man an diese bezw. die Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. anbringt, die Funktion X alsdann den Werth 0 erhalte, und dass die Funktionen Y, Z etc. alsdann ebenfalls zum Verschwinden gebracht werden. Auf dieselbe Weise schliesst man aus der Gleichung (11), dass K der Werth der Funktion u ist, welcher sich durch die nämliche Substitution ergiebt.

Das Anbringen der Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. an die Beobachtungen werden wir *die Ausgleichung der Beobachtungen* nennen, und offenbar werden wir zu dem folgenden sehr wichtigen Schluss geführt, dass die auf die vorgetragene Weise ausgeglichenen Beobachtungen alle Bedingungsgleichungen genau erfüllen, und dass jede von den Beobachtungen irgendwie abhängige Grösse gerade den Werth erhält, welcher aus der zweckmässigsten Combination der ungeänderten Beobachtungen hervorgehen würde. Wenn es also auch unmöglich ist, die Fehler e, e', e'' etc. selbst aus den Bedingungsgleichungen zu bestimmen, da ja deren Anzahl nicht ausreicht, so haben wir wenigstens *plausibelste Fehler* erlangt, welchen Namen wir den Grössen ε, ε', ε'' etc. geben dürfen.

10.

Da wir die Anzahl der Beobachtungen grösser, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen annehmen, so lassen sich ausser dem System der plausibelsten Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. unendlich viele andere finden, welche die Bedingungsgleichungen befriedigen, und es ist der Mühe werth, zu untersuchen, wie diese sich zu jenen verhalten. Es sei also $-\mathrm{E}$, $-\mathrm{E}'$, $-\mathrm{E}''$ etc. ein solches, von dem plausibelsten verschiedenes System, so haben wir

$$\begin{aligned} a\mathrm{E} + a'\mathrm{E}' + a''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ b\mathrm{E} + b'\mathrm{E}' + b''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\ c\mathrm{E} + c'\mathrm{E}' + c''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C} \end{aligned}$$

etc. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit A, B, C etc., und addirt, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (10)

$$p\varepsilon\mathrm{E} + p'\varepsilon'\mathrm{E}' + p''\varepsilon''\mathrm{E}'' + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Auf ganz ähnliche Weise liefern aber die Gleichungen (13)

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.} \qquad (14)$$

Durch Combination dieser beiden Gleichungen leitet man leicht ab

$$\begin{aligned} & p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.} \\ = {} & p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} + p(\mathrm{E}-\varepsilon)^2 + p'(\mathrm{E}'-\varepsilon')^2 \\ & + p''(\mathrm{E}''-\varepsilon'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Summe $p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.}$ wird also nothwendig *grösser* sein als die Summe $p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.}$, was man ausdrücken kann als

Lehrsatz. Die Summe der mit den beziehentlichen Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate von Verbesserungen, durch welche man die Beobachtungen mit den Bedingungsgleichungen in Uebereinstimmung zu bringen vermag, wird ein Minimum, wenn man die plausibelsten Verbesserungen anwendet.

Dies ist eben das Princip der kleinsten Quadrate, aus welchem auch die Gleichungen (12) und (10) leicht unmittelbar hätten abgeleitet werden können. Uebrigens liefert uns die Gleichung (14) für diese kleinste Summe, welche wir im Folgenden mit S bezeichnen werden, den Ausdruck $\mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$

11.

Die Bestimmung der plausibelsten Fehler giebt, da sie von den Coefficienten l, l', l'' etc. unabhängig ist, offenbar die bequemste Vorbereitung zu jedwedem Gebrauch, für den man die Beobachtungen verwenden will. Ausserdem ist es klar, dass man zu diesem Geschäft der *unbestimmten* Elimination oder der Kenntniss der Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. nicht bedarf, und dass man nur die Hülfsgrössen A, B, C etc., welche wir im Folgenden die *Correlaten* der Bedingungsgleichungen $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. nennen werden, aus den Gleichungen (12) durch bestimmte Elimination abzuleiten und in die Formeln (10) einzusetzen hat.

Obwohl nun diese Methode thatsächlich nichts zu wünschen übrig lässt, wenn allein die plausibelsten Werthe der von den Beobachtungen abhängigen Grössen verlangt werden, so scheint es sich doch anders zu verhalten, wenn ausserdem das Gewicht irgend einer Bestimmung gewünscht wird, da hierzu, mag man nun diesen oder jenen der oben gegebenen vier Ausdrücke benutzen, die Kenntniss

der Grössen L, L′, L″ etc., oder doch wenigstens die Kenntniss von x^0, y^0, z^0 etc. nothwendig erscheint. Aus diesem Grunde wird es nützlich sein, das Eliminationsverfahren genauer zu untersuchen, wodurch sich uns auch ein leichterer Weg zur Auffindung der Gewichte erschliessen wird.

12.

Der Zusammenhang der in dieser Untersuchung vorkommenden Grössen wird wesentlich durch die Einführung der allgemeinen Funktion zweiten Grades

$$\begin{gathered}[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.}\\ + [bb]y^2 + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]z^2 + \text{etc.},\end{gathered}$$

welche wir mit T bezeichnen wollen, aufgehellt. Zunächst ist diese Funktion offenbar sofort gleich

$$\left.\begin{gathered}\frac{(ax+by+cz+\text{etc.})^2}{p} + \frac{(a'x+b'y+c'z+\text{etc.})^2}{p'}\\ + \frac{(a''x+b''y+c''z+\text{etc.})^2}{p''} + \text{etc.}\end{gathered}\right\} \quad (15)$$

Ferner ist offenbar

$$\mathrm{T} = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \quad (16)$$

und, wenn hier wiederum x, y, z etc. mit Hülfe der Gleichungen (7) durch ξ, η, ζ etc. ausgedrückt werden,

$$\begin{gathered}\mathrm{T} = [\alpha\alpha]\xi^2 + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.}\\ + [\beta\beta]\eta^2 + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta^2 + \text{etc.}\end{gathered}$$

Die oben entwickelte Theorie enthält je zwei Systeme von bestimmten Werthen der Grössen x, y, z etc. und ξ, η, ζ etc.: dem ersten, in welchem $x = x^0$, $y = y^0$, $z = z^0$ etc. und $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc. ist, entspricht der folgende Werth des T

$$\mathrm{T} = [ll] - \frac{1}{\mathrm{P}},$$

was entweder durch Vergleichung des dritten Ausdrucks für das Gewicht P mit der Gleichung (16) oder unmittelbar aus dem vierten Ausdrucke erhellt; dem zweiten, in welchem $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. und $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. ist, entspricht der Werth $\mathrm{T} = \mathrm{S}$, wie sowohl aus den Formeln (10) und (15), als aus (14) und (16) klar ist.

13.

Unsere Hauptarbeit besteht nunmehr in einer ähnlichen Transformation der Funktion T, wie die, welche wir in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper", Art. 182., und weitläufiger in der „Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas" vorgetragen haben. Wir setzen nämlich

$$\left.\begin{aligned}
[bb, 1] &= [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \\
[bc, 1] &= [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} \\
[bd, 1] &= [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]} \\
&\text{etc.} \\
[cc, 2] &= [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} \\
[cd, 2] &= [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \frac{[bc, 1]\,[bd, 1]}{[bb, 1]} \\
&\text{etc.} \\
[dd, 3] &= [dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]} - \frac{[bd, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2]^2}{[cc, 2]}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

etc. etc. Setzt man alsdann*)

$$\begin{aligned}
[bb, 1]\,y + [bc, 1]\,z + [bd, 1]\,w + \text{etc.} &= \eta' \\
[cc, 2]\,z + [cd, 2]\,w + \text{etc.} &= \zeta'' \\
[dd, 3]\,w + \text{etc.} &= \varphi'''
\end{aligned}$$

etc., dann wird

$$T = \frac{\xi^2}{[aa]} + \frac{\eta'^2}{[bb, 1]} + \frac{\zeta''^2}{[cc, 2]} + \frac{\varphi'''^2}{[dd, 3]} + \text{etc.},$$

und die Abhängigkeit der Grössen η', ζ'', φ''' etc. von ξ, η, ζ, φ etc. wird durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

---

*) Im Vorhergehenden konnten je drei, auf die drei ersten Bedingungsgleichungen bezügliche Buchstaben für die verschiedenen Grössensysteme genügen; hier schien es aber gut, um das Gesetz des Algorithmus deutlicher zu zeigen, einen vierten hinzuzufügen; während nun in der natürlichen Ordnung auf die Buchstaben a, b, c; A, B, C; 𝔄, 𝔅, ℭ von selbst d, D, 𝔇 folgt, fügten wir der Reihe x, y, z, da das Alphabet versagte, das w und den ξ, η, ζ das φ an.

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc,1]}{[bb,1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd,1]}{[bb,1]}\eta' - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}\zeta''$$

etc.

Hieraus werden nun alle für unseren Zweck nothwendigen Formeln leicht entnommen. Zur Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. setzen wir nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A} \\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bc,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}' \\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bd,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}' - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}\mathfrak{C}'' \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

etc., und hiernach werden A, B, C, D etc. durch folgende Formeln, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, indem man mit der letzten beginnt, erhalten:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [ac]\mathrm{C} + [ad]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ [bb,1]\mathrm{B} + [bc,1]\mathrm{C} + [bd,1]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{B}' \\ [cc,2]\mathrm{C} + [cd,2]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}'' \\ [dd,3]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{D}''' \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Für die Summe S aber erhalten wir die neue Formel

$$\mathrm{S} = \frac{\mathfrak{A}^2}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{[bb,1]} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{[cc,2]} + \frac{\mathfrak{D}'''^2}{[dd,3]} + \text{etc.} \quad (20)$$

Wenn schliesslich das Gewicht P verlangt wird, welches der plausibelsten Bestimmung der durch die Funktion u ausgedrückten Grösse zu geben ist, so machen wir

$$\left.\begin{aligned} [bl,1] &= [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} \\ [cl,2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc,1][bl,1]}{[bb,1]} \\ [dl,3] &= [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd,1][bl,1]}{[bb,1]} - \frac{[cd,2][cl,2]}{[cc,2]} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

etc., und erhalten alsdann

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cl,2]^2}{[cc,2]} - \frac{[dl,3]^2}{[dd,3]} - \text{etc.} \quad (22)$$

Die Formeln (17) bis (22), deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint, enthalten die in jeder Beziehung vollständige Lösung unserer Aufgabe.

14.

Nachdem wir die Hauptaufgaben gelöst haben, wollen wir noch einige Nebenfragen behandeln, welche auf diesen Gegenstand ein helleres Licht werfen werden.

Zunächst muss man untersuchen, ob die Elimination, vermittelst deren x, y, z etc. aus ξ, η, ζ etc. abzuleiten sind, jemals unmöglich werden kann. Dies würde offenbar eintreten, wenn die Funktionen ξ, η, ζ etc. nicht von einander unabhängig wären. Nehmen wir daher für den Augenblick an, eine von ihnen werde durch die übrigen bereits bestimmt, so dass die identische Gleichung stattfinde

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0,$$

wo α, β, γ etc. bestimmte Zahlen bezeichnen. Es wird demnach

$$\begin{aligned} \alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} &= 0 \\ \alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} &= 0 \\ \alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc.; setzen wir nun

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\,\Theta \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\Theta' \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\Theta'' \end{aligned}$$

etc., so folgt hieraus von selbst

$$\begin{aligned} a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} &= 0 \\ b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} &= 0 \\ c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc., und ferner

$$p\Theta^2 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, welche, da alle p, p', p'' etc. ihrer Natur nach positive Grössen sind, offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. gewesen ist.

Nun betrachten wir die Werthe der vollständigen Differentiale

dX, dY, dZ etc., welche denjenigen Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen. Diese Differentiale, nämlich

$$a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \text{etc.}$$

etc., werden dem Schlusse zufolge, zu dem wir eben geführt worden sind, so von einander abhängen, dass ihre Summe nach der beziehentlichen Multiplication mit α, β, γ etc. identisch verschwinden muss, oder, was dasselbe ist, dass jedes einzelne von ihnen (wenigstens wenn der ihm entsprechende Faktor α, β, γ etc. nicht verschwindet) von selbst verschwinden muss, sobald wie alle übrigen als verschwindend vorausgesetzt werden. Deshalb muss (mindestens) eine von den Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. überflüssig sein, da sie von selbst erfüllt wird, sobald den übrigen genügt ist.

Wird übrigens die Sache genauer untersucht, so ist klar, dass dieser Schluss an und für sich nur für einen unendlich kleinen Spielraum der Veränderlichkeit der Variabeln gilt. Es sind nämlich eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden: erstens, wo eine der Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. unbedingt und allgemein bereits in den übrigen enthalten ist, was man in jedem einzelnen Fall leicht wird vermeiden können; zweitens, wo so zu sagen zufällig für die bestimmten Werthe der Grössen v, v', v'' etc., auf welche sich die Beobachtungen beziehen, eine der Funktionen X, Y, Z etc., z. B. die erste X, einen grössten oder kleinsten (oder allgemeiner einen stationären) Werth erlangt in Hinblick auf alle Aenderungen, welche wir den Grössen v, v', v'' etc. geben können, ohne die Gleichungen $Y = 0$, $Z = 0$ etc. zu stören. Da aber in unserer Untersuchung die Veränderlichkeit der Grössen nur in so engen Grenzen betrachtet werden soll, dass sie als unendlich klein behandelt werden kann, so hat dieser zweite Fall (der in der Praxis kaum je vorkommt) dieselbe Wirkung wie der erste, nämlich dass eine der Bedingungsgleichungen als überflüssig zu verwerfen sein wird; wir können also sicher sein, wenn alle aufgenommenen Bedingungsgleichungen in dem hier vorausgesetzten Sinne von einander unabhängig sind, dass die Elimination nothwendigerweise möglich sein muss. Eine ausführlichere Untersuchung dieses Gegenstandes, deren er mehr seiner theoretischen Feinheit als seiner praktischen Nützlichkeit wegen würdig ist, müssen wir uns indessen für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

15.

In den Art. 37. u. ff. der früheren Abhandlung haben wir eine Methode gelehrt, wie man die Genauigkeit der Beobachtungen a posteriori so scharf wie möglich bestimmen kann. Wenn nämlich die angenäherten Werthe von π Grössen durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gefunden worden sind und mit denjenigen Werthen verglichen werden, welche durch Rechnung aus den plausibelsten Werthen der ϱ Elemente hervorgehen, von denen jene abhängen, so muss man die Quadrate der Differenzen addiren, und diese Summe durch $\pi - \varrho$ dividiren, wonach der Quotient als angenäherter Werth des Quadrates des einer derartigen Beobachtungsgruppe anhaftenden mittleren Fehlers betrachtet werden kann. Sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, so sind diese Vorschriften nur insofern abzuändern, als vor der Addition die Quadrate mit den Gewichten der Beobachtungen zu multipliciren sind, worauf der sich so ergebende mittlere Fehler für Beobachtungen gilt, deren Gewicht als Einheit angenommen worden ist.

In der vorliegenden Untersuchung stimmt nun jene Summe offenbar mit der Summe S, und die Differenz $\pi - \varrho$ mit der Anzahl σ der Bedingungsgleichungen überein, weshalb wir für den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ den Ausdruck $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ erhalten, eine Bestimmung, welche um so grösseres Vertrauen verdient, je grösser die Anzahl σ gewesen ist.

Es wird aber die Mühe lohnen, dies auch unabhängig von der früheren Untersuchung festzustellen. Hierzu empfiehlt es sich, einige neue Bezeichnungen einzuführen. Es mögen nämlich den nachstehenden Werthen der Variabeln ξ, η, ζ etc.

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c \text{ etc.}$$

folgende Werthe der x, y, z etc. entsprechen

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \text{ etc.},$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.}\\
\beta &= a\,[\alpha\beta] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.}\\
\gamma &= a\,[\alpha\gamma] + b\,[\beta\gamma] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc. Ebenso mögen den Werthen

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c' \text{ etc.}$$

die folgenden

$$x = \alpha', \; y = \beta', \; z = \gamma' \text{ etc.}$$

entsprechen, und den

$$\xi = a'', \; \eta = b'', \; \zeta = c'' \text{ etc.}$$

ebenso

$$x = \alpha'', \; y = \beta'', \; z = \gamma'' \text{ etc.}$$

und so weiter.

Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Combination der Gleichungen (4) und (9)

$$\begin{aligned} A &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.} \\ B &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.} \\ C &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Da nun $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.}$ ist, so wird offenbar

$$\begin{aligned} S = & \;(ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}) \\ & + (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}) \\ & + (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

16.

Das Anstellen von Beobachtungen, durch welche wir die mit den zufälligen Fehlern e, e', e'' etc. behafteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten, können wir als einen Versuch betrachten, welcher zwar nicht die Grösse der einzelnen begangenen Fehler zu zeigen vermag, wohl aber durch Anwendung der früher auseinandergesetzten Vorschriften zu einem Werthe der Grösse S führt, welcher nach der eben gefundenen Formel eine gegebene Funktion jener Fehler ist. Bei einem solchen Versuch können gewiss bald grössere, bald kleinere zufällige Fehler begangen werden; je mehr Fehler aber vorhanden sind, um so grösser wird die Hoffnung sein, dass der Werth der Grösse S bei einem bestimmten Versuch von seinem mittleren Werth wenig abweichen werde. Es wird also hauptsächlich darauf ankommen, den mittleren Werth der Grösse S festzustellen. Nach den in unserer früheren Abhandlung vorgetragenen Principien, welche hier nicht wiederholt zu werden brauchen, finden wir diesen mittleren Werth

$$\begin{aligned} = (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\,m^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})\,m'^2 \\ + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})\,m''^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ mit μ, so dass also $\mu^2 = pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$ etc. ist, so kann der eben gefundene Ausdruck auf die Form

$$\left(\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2 + \left(\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2$$
$$+ \left(\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.}\right)\mu^2 + \text{etc.}$$

gebracht werden. Die Summe $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ wird aber

$$= [aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

und deshalb $= 1$ gefunden, wie man aus der Verbindung der Gleichungen (6) und (7) leicht entnehmen kann. Ebenso wird

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.} = 1$$
$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

u. s. w.

Hiernach wird der mittlere Werth des S schliesslich $= \sigma\mu^2$, und insofern man nun den zufälligen Werth des S als mittleren annehmen darf, wird $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ sein.

17.

Ein wie grosses Vertrauen diese Bestimmung verdiene, muss man nach dem mittleren, bei ihr oder ihrem Quadrat zu befürchtenden Fehler entscheiden; der letztere wird die Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe des Ausdrucks

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu^2\right)^2$$

sein, dessen Entwicklung durch ähnliche Berechnungen wie die in den Art. 39. u. ff. der früheren Abhandlung vorgetragenen erlangt wird. Wir unterdrücken dieselben hier der Kürze halber und setzen nur die Formel selbst hierher. Der mittlere bei der Bestimmung des Quadrates μ^2 zu befürchtende Fehler wird nämlich ausgedrückt durch

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma^2}\,\text{N}},$$

wo ν^4 den mittleren Werth der Biquadrate der Fehler vom Gewichte $= 1$, und N die Summe

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2$$
$$+ (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

bezeichnet. Diese Summe lässt sich im allgemeinen auf keine einfachere Form bringen; auf ähnliche Weise aber wie im Art. 40. der früheren Abhandlung kann man zeigen, dass ihr Werth immer zwischen den Grenzen π und $\frac{\sigma^2}{\pi}$ liegen muss. Bei derjenigen Hypothese, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate ursprünglich begründet worden war, fällt das Glied, welches diese Summe enthält, ganz fort, weil alsdann $\nu^4 = 3\mu^4$ wird, worauf die Genauigkeit, welche dem nach der Formel $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ bestimmten mittleren Fehler zukommt, dieselbe sein wird, als wenn derselbe aus σ genau bekannten Fehlern nach den Art. 15. und 16. der früheren Abhandlung ermittelt worden wäre.

18.

Zur Ausgleichung der Beobachtungen ist, wie wir oben gesehen haben, zweierlei erforderlich: erstens die Ermittelung der Correlaten der Bedingungsgleichungen, d. h. der Zahlen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, zweitens das Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (10). Die so erhaltene Ausgleichung kann man eine *vollkommene* oder *vollständige* nennen, um sie von einer *unvollkommenen* oder *unvollständigen* zu unterscheiden; mit diesem Namen werden wir nämlich die Resultate bezeichnen, welche sich zwar aus denselben Gleichungen (10) ergeben, aber unter Zugrundelegung von Werthen der Grössen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) nicht, d. h. nur einigen oder keiner, genügen. Solche Aenderungen der Beobachtungen aber, welche unter den Formeln (10) nicht enthalten sein können, sollen von der gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen sein und auch den Namen Ausgleichung nicht erhalten. Da, sobald die Gleichungen (10) statt haben, die Gleichungen (13) mit den Gleichungen (12) völlig gleichbedeutend sind, kann man diesen Unterschied auch so fassen: Die vollständig ausgeglichenen Beobachtungen genügen allen Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., die unvollständig ausgeglichenen aber entweder keiner oder doch wenigstens nicht allen; die Ausgleichung, durch welche allen Bedingungsgleichungen genügt wird, ist daher nothwendigerweise von selbst vollständig.

19.

Da nun aus dem Begriff einer Ausgleichung schon von selbst folgt, dass die Summe zweier Ausgleichungen wieder eine Ausgleichung ergebe, so sieht man leicht, dass es einerlei ist, ob man die Vorschriften zur Erlangung einer vollkommenen Ausgleichung unmittelbar auf die ursprünglichen Beobachtungen, oder auf bereits unvollständig ausgeglichene Beobachtungen anwendet.

Es mögen in der That $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. ein System einer unvollständigen Ausgleichung bilden, welches aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Theta p &= A^0 a + B^0 b + C^0 c + \text{etc.} \\ \Theta' p' &= A^0 a' + B^0 b' + C^0 c' + \text{etc.} \\ \Theta'' p'' &= A^0 a'' + B^0 b'' + C^0 c'' + \text{etc.} \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

hervorgehe. Da vorausgesetzt wird, dass die durch diese Ausgleichungen geänderten Beobachtungen nicht allen Bedingungsgleichungen genügen, so seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe, welche X, Y, Z etc. durch Einsetzung jener erlangen. Man suche die Zahlen A^*, B^*, C^* etc., welche den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= A^*[aa] + B^*[ab] + C^*[ac] + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= A^*[ab] + B^*[bb] + C^*[bc] + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= A^*[ac] + B^*[bc] + C^*[cc] + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

etc. genügen; alsdann wird die vollständige Ausgleichung der auf jene Weise geänderten Beobachtungen durch neue Aenderungen $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc. bewirkt, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \varkappa p &= A^* a + B^* b + C^* c + \text{etc.} \\ \varkappa' p' &= A^* a' + B^* b' + C^* c' + \text{etc.} \\ \varkappa'' p'' &= A^* a'' + B^* b'' + C^* c'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

etc. zu berechnen sind. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Verbesserungen mit der vollständigen Ausgleichung der ursprünglichen Beobachtungen zusammenhängen. Zunächst ist klar, dass man hat

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Setzen wir in diesen Gleichungen für Θ, Θ', Θ'' etc. die Werthe aus (I) und für $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe aus (II), so finden wir

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., woraus folgt, dass die Correlaten, welche die Bedingungsgleichungen (12) erfüllen,

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^* \text{ etc.}$$

sind. Hiernach zeigen die Gleichungen (10), (I) und (III), dass

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \Theta' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

ist, d. h. die Ausgleichung der Beobachtungen ergiebt sich gleich vollständig sowohl bei unmittelbarer, als auch bei mittelbarer, von einer unvollständigen Ausgleichung ausgehenden Rechnung.

20.

Wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen allzugross ist, kann die Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. durch die direkte Elimination so weitschichtig werden, dass ihr die Geduld des Rechners nicht gewachsen ist; alsdann wird es häufig bequem sein können, die vollständige Ausgleichung durch successive Annäherungen mit Hülfe des im vorigen Art. enthaltenen Theorems zu ermitteln. Man theile die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen, und suche zuerst die Ausgleichung, durch welche der ersten Gruppe von Gleichungen, unter Vernachlässigung der übrigen, genügt wird. Darauf behandele man die durch diese Ausgleichung geänderten Beobachtungen so, dass allein den Gleichungen der zweiten Gruppe Rechnung getragen wird. Im allgemeinen wird durch das Anbringen des zweiten Systems von Ausgleichungen das Zusammenstimmen mit den Gleichungen der ersten Gruppe gestört werden; deshalb kehren wir, wenn nur zwei Gruppen gebildet sind, zu den Gleichungen der ersten Gruppe zurück, und bestimmen ein drittes System, welches dieser Genüge leistet; darauf unterwerfen wir die dreimal verbesserten Beobachtungen einer vierten Ausgleichung, wo nur die Gleichungen der zweiten Gruppe berücksichtigt werden. So werden wir, indem wir abwechselnd bald die erste, bald die zweite Gruppe berücksichtigen, fortwährend abnehmende Ausgleichungen erhalten, und war die Gruppentheilung geschickt getroffen, so werden wir nach wenigen Wiederholungen zu festen Zahlen gelangen. Wurden mehr als zwei Gruppen gebildet, so verhält sich die Sache ähnlich; die einzelnen Gruppen kommen nach einander zur Berechnung, nach der letzten wieder die erste

u. s. w. Hier möge indess der Hinweis auf diese Methode genügen, deren Erfolg sicher sehr von einer geschickten Anwendung abhängen wird.

21.

Es erübrigt noch, dass wir den Beweis des im Art. 8. vorausgesetzen Hülfssatzes nachholen, wobei wir indess der Durchsichtigkeit wegen andere hierzu mehr geeignete Bezeichnungen anwenden wollen.

Es seien also x^0, x', x'', x''' etc. Variable; und wir nehmen an, aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} = X^0 \\ n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} = X' \\ n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} = X'' \\ n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} = X''' \\ \text{etc.} \end{array}$$

folge durch Elimination

$$\begin{array}{l} N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} = x^0 \\ N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} = x' \\ N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} = x'' \\ N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} = x''' \\ \text{etc.} \end{array}$$

Setzt man daher in die erste und zweite Gleichung des zweiten Systems die Werthe der Grössen X^0, X', X'', X''' etc. aus dem ersten System ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x^0 = \ & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x' = \ & N^{10}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{11}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{12}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{13}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Da jede dieser beiden Gleichungen offenbar eine identische Gleichung sein muss, so darf man sowohl in die erste, als in die zweite beliebige bestimmte Werthe für x^0, x', x'', x''' etc. einsetzen. Wir setzen in die erste ein

$$x^0 = N^{10}, \quad x' = N^{11}, \quad x'' = N^{12}, \quad x''' = N^{13} \text{ etc.},$$

in die zweite aber

$$x^0 = N^{00}, \quad x' = N^{01}, \quad x'' = N^{02}, \quad x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

Alsdann folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \quad & (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma[N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta}](n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}),$$

wo durch $\alpha\beta$ alle Combinationen von ungleichen Indices bezeichnet werden.

Hieraus folgt, dass, wenn

$$n^{01} = n^{10}, \; n^{02} = n^{20}, \; n^{03} = n^{30}, \; n^{12} = n^{21}, \; n^{13} = n^{31}, \; n^{23} = n^{32} \text{ etc.}$$

oder allgemein

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$$

war, auch

$$N^{10} = N^{01}$$

sein wird. Da nun die Reihenfolge der Variabeln in den gegebenen Gleichungen willkürlich ist, so wird offenbar unter jener Voraussetzung allgemein

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

Da die in dieser Abhandlung dargelegte Methode vorzüglich eine häufige und bequeme Anwendung in den Rechnungen der höheren Geodäsie findet, so hoffen wir, unseren Lesern werde die Erläuterung der Vorschriften an einigen aus dieser entnommenen Beispielen nicht unlieb sein.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Winkeln eines Systems von Dreiecken sind hauptsächlich einer dreifachen Quelle zu entnehmen.

I. Die Summe der Horizontalwinkel, welche bei einem vollständigen Umlauf um denselben Scheitel den Horizont ausfüllen, muss vier Rechten gleich sein.

II. Die Summe der drei Winkel in jedem Dreieck ist einer gegebenen Grösse gleich, da man, wenn das Dreieck auf einer krummen Oberfläche liegt, den Ueberschuss jener Summe über zwei Rechte so scharf berechnen kann, dass er für vollkommen genau gelten darf.

III. Die dritte Quelle entspringt dem Verhältniss der Seiten in Dreiecken, welche eine geschlossene Kette bilden. Ist nämlich eine Reihe von Dreiecken so mit einander verbunden, dass das zweite Dreieck eine Seite a mit dem ersten Dreieck, eine andere b mit dem dritten gemeinsam hat; ebenso habe das vierte Dreieck mit dem dritten die Seite c, mit dem fünften die Seite d gemeinsam; und so weiter bis zum letzten Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite k und mit dem ersten wiederum die Seite l gemeinsam habe, dann werden die Werthe der Quotienten

$$\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c} \cdots \frac{l}{k}$$

nach bekannten Methoden bezw. aus je zwei, den gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegenden Winkeln auf einander folgender Dreiecke zu erhalten sein, und da das Produkt jener Brüche $= 1$ sein muss, so ergiebt sich hieraus eine Bedingungsgleichung zwischen den Sinus jener Winkel (welche bezw. um den dritten Theil des sphärischen oder sphäroidischen Excesses vermindert sind, wenn die Dreiecke auf einer krummen Oberfläche liegen).

Uebrigens kommt es in complicirteren Dreiecksnetzen sehr häufig vor, dass Bedingungsgleichungen der zweiten oder dritten Art sich in grösserer Anzahl darbieten, als man beibehalten darf, weil nämlich ein Theil derselben in den übrigen schon enthalten ist. Dagegen wird der Fall seltener eintreten, wo man den Bedingungsgleichungen der zweiten Art ähnliche Gleichungen, die sich auf mehrseitige Figuren beziehen, beifügen muss, nämlich nur dann, wenn Polygone gebildet werden, welche nicht durch Messungen in Dreiecke getheilt sind. Ueber diese Dinge werden wir aber, weil es unserem gegenwärtigen Zweck zu fern liegt, bei einer anderen Gelegenheit des weiteren reden. Indessen können wir die Bemerkung nicht mit Stillschweigen übergehen, dass unsere Theorie, wenn eine reinliche und strenge Anwendung gewünscht wird, voraussetzt, es

seien die mit v, v', v'' etc. bezeichneten Grössen wirklich und unmittelbar beobachtet, oder so aus Beobachtungen abgeleitet, dass sie von einander unabhängig bleiben oder wenigstens als von einander unabhängig betrachtet werden können. In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet und können demnach für v, v', v'' etc. angenommen werden; wir dürfen aber nicht vergessen, falls das System zufällig ausserdem solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern sich aus Summen oder Differenzen wirklich beobachteter Winkel ergeben, dass diese nicht unter die Zahl der beobachteten gerechnet, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung bei den Rechnungen beibehalten werden müssen. Anders aber wird sich die Sache bei einer Beobachtungsweise verhalten, welche der von *Struve* (Astronomische Nachrichten, II, S. 431) befolgten ähnlich ist, bei der die Richtungen der einzelnen von demselben Scheitel ausgehenden Seiten durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung erhalten werden. Dann sind nämlich gerade diese Winkel für v, v', v'' etc. anzunehmen, wodurch sich alle Dreieckswinkel in Form von Differenzen darstellen, während die Bedingungsgleichungen der ersten Art, denen der Natur der Sache nach von selbst genügt wird, als überflüssig fortfallen. Die Beobachtungsweise, welche ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Triangulation angewandt habe, unterscheidet sich zwar sowohl von der ersten, als von der zweiten Methode, kann jedoch in Bezug auf das Resultat der letzteren gleichgeachtet werden, so dass man bei den einzelnen Stationen die von einem gleichsam beliebigen Anfang aus gezählten Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten für die Grössen v, v', v'' etc. annehmen darf. Wir werden nun zwei Beispiele ausarbeiten, von denen das eine der ersten, das andere der zweiten Weise entspricht.

23.

Das erste Beispiel entnehmen wir dem Werke von *de Krayenhoff*, „Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande“, und zwar unterwerfen wir den Theil des Dreiecksnetzes einer Ausgleichung, welcher zwischen den neun Punkten Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde und Gröningen enthalten ist. Es werden zwischen diesen Punkten neun Dreiecke gebildet, welche in jenem Werke mit den Nummern 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 bezeichnet sind, und

deren Winkel (welche wir durch vorgesetzte Indices unterscheiden) nach der Tabelle, S. 77 bis 81, folgendermaassen beobachtet worden sind:

Dreieck 121.

0.	Harlingen	50°	58′	15,238″
1.	Leeuwarden	82	47	15,351
2.	Ballum	46	14	27,202

Dreieck 122.

3.	Harlingen	51	5	39,717
4.	Sneek	70	48	33,445
5.	Leeuwarden	58	5	48,707

Dreieck 123.

6.	Sneek	49	30	40,051
7.	Drachten	42	52	59,382
8.	Leeuwarden	87	36	21,057

Dreieck 124.

9.	Sneek	45	36	7,492
10.	Oldeholtpade	67	52	0,048
11.	Drachten	66	31	56,513

Dreieck 125.

12.	Drachten	53	55	24,745
13.	Oldeholtpade	47	48	52,580
14.	Oosterwolde	78	15	42,347

Dreieck 127.

15.	Leeuwarden	59	24	0,645
16.	Dockum	76	34	9,021
17.	Ballum	44	1	51,040

Dreieck 128.

18.	Leeuwarden	72	6	32,043
19.	Drachten	46	53	27,163
20.	Dockum	61	0	4,494

Dreieck 131.

21.	Dockum	57	1	55,292
22.	Drachten	83	33	14,515
23.	Gröningen	39	24	52,397

Dreieck 132.

24. Oosterwolde	81°	54′	17,447″
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246 .

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen diesen Dreiecken zeigt, dass zwischen den 27 Winkeln, deren angenäherte Werthe durch Beobachtung bekannt geworden sind, 13 Bedingungsgleichungen bestehen, und zwar zwei der ersten, neun der zweiten und zwei der dritten Art. Es ist aber unnöthig, diese Gleichungen alle in ihrer geschlossenen Form hinzuschreiben, da für die Rechnungen nur die in der allgemeinen Theorie mit $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc.; $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc.; etc. bezeichneten Grössen verlangt werden; deshalb schreiben wir an deren Stelle sofort die oben mit (13) bezeichneten Gleichungen, welche jene Grössen vor Augen stellen; anstatt der Zeichen ε, ε', ε'' etc. setzen wir hier einfach (0), (1), (2) etc.

Demnach entsprechen den beiden Bedingungsgleichungen erster Art die folgenden:

$$\begin{aligned}(1) + (5) + (8) + (15) + (18) &= -2{,}197''\\ (7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) &= -0{,}436\,.\end{aligned}$$

Die sphäroidischen Excesse der neun Dreiecke finden wir der Reihe nach: 1,749″; 1,147″; 1,243″; 1,698″; 0,873″; 1,167″; 1,104″; 2,161″; 1,403″. Es entsteht daher als erste Bedingungsgleichung der zweiten Art die folgende*): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180^\circ\, 0'\, 1{,}749'' = 0$, und analog die übrigen. Hieraus erhalten wir die neun folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(0) + (1) + (2) &= -3{,}958''\\ (3) + (4) + (5) &= +0{,}722\\ (6) + (7) + (8) &= -0{,}753\\ (9) + (10) + (11) &= +2{,}355\\ (12) + (13) + (14) &= -1{,}201\\ (15) + (16) + (17) &= -0{,}461\\ (18) + (19) + (20) &= +2{,}596\\ (21) + (22) + (23) &= +0{,}043\\ (24) + (25) + (26) &= -0{,}616\,.\end{aligned}$$

*) Wir ziehen es vor, die Indices in diesem Beispiel durch arabische Ziffern auszudrücken.

Die Bedingungsgleichungen der dritten Art werden bequemer in logarithmischer Form aufgestellt; so heisst die erste

$$
\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(0)} - 0{,}583'') - \log\sin(v^{(2)} - 0{,}583'') - \log\sin(v^{(3)} - 0{,}382'') \\
&+ \log\sin(v^{(4)} - 0{,}382'') - \log\sin(v^{(6)} - 0{,}414'') + \log\sin(v^{(7)} - 0{,}414'') \\
&- \log\sin(v^{(16)} - 0{,}389'') + \log\sin(v^{(17)} - 0{,}389'') - \log\sin(v^{(19)} - 0{,}368'') \\
&+ \log\sin(v^{(20)} - 0{,}368'') = 0\,.
\end{aligned}
$$

Es erscheint überflüssig, die andere in geschlossener Form hinzuschreiben. Diesen beiden Gleichungen entsprechen die folgenden, wo die einzelnen Coefficienten sich auf die siebente Stelle der *Brigg*'schen Logarithmen beziehen,

$$
\begin{aligned}
17{,}068\,(0) &- 20{,}174\,(2) - 16{,}993\,(3) + 7{,}328\,(4) - 17{,}976\,(6) \\
&+ 22{,}672\,(7) - 5{,}028\,(16) + 21{,}780\,(17) - 19{,}710\,(19) \\
&+ 11{,}671\,(20) = -371 \\
17{,}976\,(6) &- 0{,}880\,(8) - 20{,}617\,(9) + 8{,}564\,(10) - 19{,}082\,(13) \\
&+ 4{,}375\,(14) + 6{,}798\,(18) - 11{,}671\,(20) + 13{,}657\,(21) \\
&- 25{,}620\,(23) - 2{,}995\,(24) + 33{,}854\,(25) = +370\,.
\end{aligned}
$$

Da kein Grund angegeben ist, weshalb wir den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegen sollten, so setzen wir $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$. Bezeichnen wir daher die Correlaten der Bedingungsgleichungen in der Reihenfolge, in der wir die ihnen entsprechenden Gleichungen aufgestellt haben, mit A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, so ergeben sich zur Bestimmung derselben folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
-2{,}197'' &= 5\,A + C + D + E + H + I + 5{,}917\,N \\
-0{,}436 &= 6\,B + E + F + G + I + K + L + 2{,}962\,M \\
-3{,}958 &= A + 3\,C - 3{,}106\,M \\
+0{,}722 &= A + 3\,D - 9{,}665\,M \\
-0{,}753 &= A + B + 3\,E + 4{,}696\,M + 17{,}096\,N \\
+2{,}355 &= B + 3\,F - 12{,}053\,N \\
-1{,}201 &= B + 3\,G - 14{,}707\,N \\
-0{,}461 &= A + 3\,H + 16{,}752\,M \\
+2{,}596 &= A + B + 3\,I - 8{,}039\,M - 4{,}874\,N \\
+0{,}043 &= B + 3\,K - 11{,}963\,N \\
-0{,}616 &= B + 3\,L + 30{,}859\,N \\
-\quad 371 &= +2{,}962\,B - 3{,}106\,C - 9{,}665\,D + 4{,}696\,E + 16{,}752\,H \\
&\quad - 8{,}039\,I + 2902{,}27\,M - 459{,}33\,N \\
+\quad 370 &= +5{,}917\,A + 17{,}096\,E - 12{,}053\,F - 14{,}707\,G \\
&\quad - 4{,}874\,I - 11{,}963\,K + 30{,}859\,L - 459{,}33\,M \\
&\quad + 3385{,}96\,N\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir durch Elimination

$A = -0{,}598$	$H = +0{,}659$
$B = -0{,}255$	$I = +1{,}050$
$C = -1{,}234$	$K = +0{,}577$
$D = +0{,}086$	$L = -1{,}351$
$E = -0{,}477$	$M = -0{,}109792$
$F = +1{,}351$	$N = +0{,}119681$.
$G = +0{,}271$	

Endlich erhalten wir die plausibelsten Fehler aus den Formeln

$$
\begin{aligned}
(0) &= C + 17{,}068\,M \\
(1) &= A + C \\
(2) &= C - 20{,}174\,M \\
(3) &= D - 16{,}993\,M
\end{aligned}
$$

etc., woraus wir die folgenden numerischen Werthe finden; zur Vergleichung setzen wir (mit entgegengesetzten Vorzeichen) die von *de Krayenhoff* an die Beobachtungen angebrachten Verbesserungen hinzu:

	de Kr.		*de Kr.*
(0) = − 3,108″	− 2,090″	(14) = + 0,795″	+ 2,400″
(1) = − 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	− 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = − 1,732	− 7,674
(4) = − 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = − 0,512	− 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	− 0,137	(20) = − 1,628	− 5,530
(7) = − 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = − 1,180	− 1,614	(22) = + 0,322	− 3,454
(9) = − 1,116	0	(23) = − 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = − 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	− 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = − 1,606	− 3,077 .
(13) = − 2,013	− 6,014		

Die Summe der Quadrate unserer Ausgleichungen findet man = 97,8845. Hieraus findet man den mittleren Fehler, insoweit er aus den 27 beobachteten Winkeln abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{97{,}8845}{13}} = 2{,}7440'' .$$

Die Summe der Quadrate der Aenderungen, welche *de Krayenhoff* selbst an die beobachteten Winkel angebracht hat, wird = 341,4201 gefunden.

24.

Das zweite Beispiel liefern uns die Dreiecke zwischen den fünf Punkten Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede der Triangulation von Hannover. Beobachtet sind die Richtungen*):

	Auf der Station *Falkenberg*			
0.	Wilsede	187°	47′	30,311″
1.	Wulfsode.	225	9	39,676
2.	Hauselberg	266	13	56,239
3.	Breithorn	274	14	43,634
	Auf der Station *Breithorn*			
4.	Falkenberg.	94	33	40,755
5.	Hauselberg	122	51	23,054
6.	Wilsede	150	18	35,100
	Auf der Station *Hauselberg*			
7.	Falkenberg.	86	29	6,872
8.	Wilsede	154	37	9,624
9.	Wulfsode.	189	2	56,376
10.	Breithorn	302	47	37,732
	Auf der Station *Wulfsode*			
11.	Hauselberg	9	5	36,593
12.	Falkenberg.	45	27	33,556
13.	Wilsede	118	44	13,159
	Auf der Station *Wilsede*			
14.	Falkenberg.	7	51	1,027
15.	Wulfsode.	298	29	49,519
16.	Breithorn	330	3	7,392
17.	Hauselberg	334	25	26,746.

*) Die Nullrichtungen, auf welche sich die einzelnen Richtungen beziehen, werden hier als willkürlich angesehen, obwohl sie thatsächlich mit den Meridianlinien der Stationen zusammenfallen. Die Beobachtungen werden seiner Zeit vollständig veröffentlicht werden; einstweilen findet man eine Figur in den „Astronomischen Nachrichten", Bd. I, S. 441.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich sieben Dreiecke bilden.

Dreieck I.

Falkenberg	8°	0′	47,395″
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

Dreieck II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Dreieck III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg	102	33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Dreieck IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	33	25	34,281

Dreieck V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Dreieck VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg	148	10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Dreieck VII.

Hauselberg	34	25	46,752
Wulfsode	109	38	36,566
Wilsede	35	55	37,227.

Es sind also sieben Bedingungsgleichungen zweiter Art vorhanden (die Bedingungsgleichungen erster Art fallen offenbar fort), zu deren Aufstellung vor allem die sphäroidischen Excesse der sieben Dreiecke zu ermitteln sind. Hierzu ist die Kenntniss der absoluten Grösse wenigstens einer Seite erforderlich; die Seite zwischen den

Punkten Wilsede und Wulfsode ist 22877,94 Meter lang. Hieraus ergeben sich die sphäroidischen Excesse der Dreiecke I . . . 0,202″; II. . . 2,442″; III. . . 1,257″; IV. . . 1,919″; V. . . 1,957″; VI. . . 0,321″; VII . . . 1,295″.

Wenn wir jetzt die Richtungen in der Reihenfolge, wie sie oben angeführt und durch Indices unterschieden sind, mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. bezeichnen, so werden die Winkel des ersten Dreiecks

$$v^{(3)} - v^{(2)}, \quad v^{(5)} - v^{(4)}, \quad 360^\circ + v^{(7)} - v^{(10)},$$

und deshalb die erste Bedingungsgleichung

$$- v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^\circ\ 59'\ 59{,}798'' = 0\,.$$

Ebenso liefern die übrigen Dreiecke die sechs anderen; eine geringe Achtsamkeit wird aber zeigen, dass diese sieben Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern dass die zweite identisch mit der Summe der ersten, vierten und sechsten, die Summe der dritten und fünften aber identisch mit der Summe der vierten und siebenten ist; deshalb lassen wir die zweite und fünfte unberücksichtigt. An Stelle der übrigbleibenden Bedingungsgleichungen in geschlossener Form schreiben wir die entsprechenden Gleichungen des Systems (13), indem wir für die Zeichen ε, ε' etc. hier (0), (1), (2) etc. benutzen,

$$\begin{aligned}
-1{,}368'' &= -(2) + (3) - (4) + (5) + (7) - (10)\\
+1{,}773 &= -(1) + (2) - (7) + (9) - (11) + (12)\\
+1{,}042 &= -(0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17)\\
-0{,}813 &= -(5) + (6) - (8) + (10) - (16) + (17)\\
-0{,}750 &= -(8) + (9) - (11) + (13) - (15) + (17)\,.
\end{aligned}$$

Von Bedingungsgleichungen der dritten Art würden sich *acht* aus dem System der Dreiecke finden lassen, da man je drei der vier Dreiecke I, II, IV, VI und je drei von III, IV, V, VII zu diesem Zweck combiniren kann; eine geringe Aufmerksamkeit lehrt indess, dass *zwei* ausreichen, eine von jenen und eine von diesen, da die übrigen in ihnen und den früheren Bedingungsgleichungen schon enthalten sein müssen. Unsere sechste Bedingungsgleichung wird daher sein

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(3)} - v^{(2)} - 0{,}067'') - \log\sin(v^{(5)} - v^{(4)} - 0{,}067'')\\
+&\log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')\\
+&\log\sin(v^{(6)} - v^{(5)} - 0{,}107'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(16)} - 0{,}107'') = 0
\end{aligned}$$

und die siebente

$$\log\sin(v^{(2)} - v^{(1)} - 0{,}419'') - \log\sin(v^{(12)} - v^{(11)} - 0{,}419'')$$
$$+ \log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')$$
$$+ \log\sin(v^{(13)} - v^{(11)} - 0{,}432'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(15)} - 0{,}432'') = 0,$$

und es entsprechen ihnen als Gleichungen des Systems (13)

$$\begin{aligned} +25 = &+ 4{,}31\,(0) - 153{,}88\,(2) + 149{,}57\,(3) + 39{,}11\,(4) \\ &- 79{,}64\,(5) + 40{,}53\,(6) + 31{,}90\,(14) + 275{,}39\,(16) \\ &- 307{,}29\,(17) \\ -3 = &+ 4{,}31\,(0) - 24{,}16\,(1) + 19{,}85\,(2) + 36{,}11\,(11) \\ &- 28{,}59\,(12) - 7{,}52\,(13) + 31{,}90\,(14) + 29{,}06\,(15) \\ &- 60{,}96\,(17). \end{aligned}$$

Wenn wir nun den einzelnen Richtungen dieselbe Genauigkeit beilegen, indem wir $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$ setzen, und die Correlaten der sieben Bedingungsgleichungen in der obigen Reihenfolge mit A, B, C, D, E, F, G bezeichnen, so werden dieselben aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sein:

$$\begin{aligned} -1{,}368 &= +6A - 2B - 2C - 2D + 184{,}72F - 19{,}85G \\ +1{,}773 &= -2A + 6B + 2C + 2E - 153{,}88F - 20{,}69G \\ +1{,}042 &= -2A + 2B + 6C - 2D - 2E + 181{,}00F + 108{,}40G \\ -0{,}813 &= -2A - 2C + 6D + 2E - 462{,}51F - 60{,}96G \\ -0{,}750 &= +2B - 2C + 2D + 6E - 307{,}29F - 133{,}65G \\ +25 &= +184{,}72A - 153{,}88B + 181{,}00C - 462{,}51D \\ &\quad - 307{,}29E + 224868F + 16694{,}1G \\ -3 &= -19{,}85A - 20{,}69B + 108{,}40C - 60{,}96D - 133{,}65E \\ &\quad + 16694{,}1F + 8752{,}39G. \end{aligned}$$

Hieraus leiten wir durch Elimination ab

$$\begin{aligned} A &= -0{,}225 \\ B &= +0{,}344 \\ C &= -0{,}088 \\ D &= -0{,}171 \\ E &= -0{,}323 \\ F &= +0{,}000215915 \\ G &= -0{,}00547462. \end{aligned}$$

Die plausibelsten Fehler erhält man nunmehr aus den Formeln

$$\begin{aligned} (0) &= -C + 4{,}31F + 4{,}31G \\ (1) &= -B - 24{,}16G \\ (2) &= -A + B + C - 153{,}88F + 19{,}85G \end{aligned}$$

etc., woraus sich die numerischen Werthe ergeben

$(0) = +\,0{,}065''$	$(9) = +\,0{,}021''$
$(1) = -\,0{,}212$	$(10) = +\,0{,}054$
$(2) = +\,0{,}339$	$(11) = -\,0{,}219$
$(3) = -\,0{,}193$	$(12) = +\,0{,}501$
$(4) = +\,0{,}233$	$(13) = -\,0{,}282$
$(5) = -\,0{,}071$	$(14) = -\,0{,}256$
$(6) = -\,0{,}162$	$(15) = +\,0{,}164$
$(7) = -\,0{,}481$	$(16) = +\,0{,}230$
$(8) = +\,0{,}406$	$(17) = -\,0{,}139\,.$

Die Summe der Quadrate dieser Fehler wird $= 1{,}2288$ gefunden; hieraus folgt der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung, insoweit er aus den beobachteten 18 Richtungen abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0{,}4190''.$$

25.

Um auch den zweiten Theil unserer Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, suchen wir die Genauigkeit auf, mit welcher die Seite Falkenberg—Breithorn aus der Seite Wilsede—Wulfsode mit Hülfe der ausgeglichenen Beobachtungen bestimmt wird. Die Funktion u, durch welche dieselbe in diesem Fall ausgedrückt wird, ist

$$u = 22877{,}94^{\text{m}} \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0{,}652'')\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0{,}814'')}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0{,}652'')\sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0{,}814'')}.$$

Der Werth derselben wird mit den verbesserten Werthen der Richtungen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. gefunden

$$= 26766{,}68^{\text{m}}.$$

Die Differentiation jenes Ausdrucks liefert aber, wenn man sich die Differentiale $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$ etc. in Secunden ausgedrückt denkt,

$$\begin{aligned} du = {} & 0{,}16991^{\text{m}}(dv^{(0)} - dv^{(1)}) + 0{,}08836^{\text{m}}(dv^{(4)} - dv^{(6)}) \\ & - 0{,}03899^{\text{m}}(dv^{(12)} - dv^{(13)}) + 0{,}16731^{\text{m}}(dv^{(14)} - dv^{(16)})\,. \end{aligned}$$

Hieraus findet man weiter

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0{,}08836 \\ [bl] &= +\ 0{,}13092 \\ [cl] &= -\ 0{,}00260 \\ [dl] &= +\ 0{,}07895 \end{aligned}$$

$$[el] = +\ 0{,}03899$$
$$[fl] = -40{,}1315$$
$$[gl] = +10{,}9957$$
$$[ll] = +\ 0{,}13238.$$

Man findet hiernach endlich mit Hülfe der oben entwickelten Methoden, wenn wir das Meter als lineare Längeneinheit annehmen,

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = 0{,}08329\,, \quad \text{oder} \quad \mathrm{P} = 12{,}006\,,$$

woraus der mittlere im Werthe der Seite Falkenberg—Breithorn zu befürchtende Fehler $= 0{,}2886\, m$ Meter ist (wo m der mittlere zu befürchtende Fehler der beobachteten Richtungen, und zwar in Sekunden ausgedrückt, ist), und folglich, wenn wir den oben ermittelten Werth des m nehmen,

$$= 0{,}1209^{\mathrm{m}}.$$

Uebrigens lehrt der Anblick des Systems der Dreiecke unmittelbar, dass der Punkt Hauselberg darin ganz weggelassen werden kann, ohne dass der Zusammenhang zwischen den Seiten Wilsede—Wulfsode und Falkenberg—Breithorn gestört würde. Aber es wäre aus methodischen Grundsätzen nicht zu billigen, wollte man deshalb die auf den Punkt Hauselberg bezüglichen Bebachtungen *unterdrücken**), da sie doch sicher zur Erhöhung der Genauigkeit beitragen. Um deutlicher zu zeigen, wie gross die Zunahme der Genauigkeit hierdurch wird, wiederholen wir die Berechnung, indem wir Alles, was sich auf den Punkt Hauselberg bezieht, weglassen, wodurch von den oben gegebenen 18 Richtungen 8 fortfallen, und die plausibelsten Fehler der übrigen folgendermaassen gefunden werden:

$(0) = +0{,}327''$	$(12) = +0{,}206''$
$(1) = -0{,}206$	$(13) = -0{,}206$
$(3) = -0{,}121$	$(14) = +0{,}327$
$(4) = +0{,}121$	$(15) = +0{,}206$
$(6) = -0{,}121$	$(16) = +0{,}121\,.$

Der Werth der Seite Falkenberg—Breithorn ergiebt sich dann

*) Der grössere Theil dieser Beobachtungen war schon angestellt, ehe der Punkt Breithorn aufgefunden und in das System aufgenommen ward.

$= 26766{,}63^{m}$, zwar wenig von dem oben gefundenen abweichend, die Berechnung des Gewichts liefert aber

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082, \quad \text{oder} \quad P = 7{,}644$$

und deshalb den mittleren zu befürchtenden Fehler $= 0{,}36169\,m$ Meter $= 0{,}1515^{m}$. Es erhellt daher, dass durch Hinzunahme der auf Hauselberg bezüglichen Beobachtungen das Gewicht der Bestimmung der Seite Falkenberg—Breithorn im Verhältniss der Zahl 7,644 zu 12,006, oder der Einheit zu 1,571 vermehrt ist.

II.

Aus der
Theorie der Bewegung der Himmelskörper,
welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen.

(1809).

Zweites Buch. Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Bahn, die beliebig viele Beobachtungen möglichst genau erfüllt.

172.

Wenn die astronomischen Beobachtungen und die übrigen Zahlenwerthe, auf denen die Berechnung der Bahnen beruht, sich einer absoluten Genauigkeit erfreuten, so würden sich auch die Elemente, mag man sie nun aus drei oder aus vier Beobachtungen abgeleitet haben, sofort völlig genau ergeben (wenigstens insoweit man voraussetzt, dass die Bewegungen genau nach den *Kepler*'schen Gesetzen erfolgen), so dass man durch Hinzunahme immer neuer Beobachtungen nur eine Bestätigung und keine Verbesserung erhalten könnte. Da nun aber in der That alle unsere Messungen und Beobachtungen nur Annäherungen an die Wahrheit sind, und dasselbe von allen auf ihnen beruhenden Rechnungen gelten muss, so wird das höchste Ziel aller, auf bestimmte Erscheinungen sich beziehenden Rechnungen darin bestehen müssen, der Wahrheit möglichst nahe zu kommen. Dies kann aber nur durch eine zweckmässige Combination von *mehr* Beobachtungen geschehen, als deren zur Bestimmung der unbekannten Grössen unbedingt erforderlich sind. Dies Geschäft wird man jedoch dann erst unternehmen können, wenn man bereits eine angenäherte Kenntniss der Bahn besitzt, welche alsdann so verbessert werden muss, dass sie alle Beobachtungen *möglichst genau* erfüllt. Wenn nun auch dieser Ausdruck etwas Unbestimmtes zu enthalten scheint,

so werden doch im Folgenden Principien vorgetragen werden, vermittelst deren die Aufgabe einer gesetzmässigen und methodischen Lösung unterworfen wird.

Die höchste Genauigkeit zu erstreben, kann nur dann die Mühe lohnen, wenn an die zu bestimmende Bahn gleichsam die letzte Hand anzulegen ist. So lange man dagegen die Hoffnung hegt, dass bald neue Beobachtungen Anlass zu neuen Verbesserungen bieten werden, so empfiehlt es sich, je nach der Sachlage mehr oder weniger auf die äusserste Genauigkeit zu verzichten, wenn man hierdurch die Weitschichtigkeit der Rechnungen wesentlich verringern kann. Wir werden uns bemühen, für jeden der beiden Fälle Rath zu schaffen.

173.

Vor allem ist es von grösster Bedeutung, die einzelnen geocentrischen Positionen des Himmelskörpers, welche man der bebetreffenden Bahn zu Grunde legen will, nicht aus vereinzelten Beobachtungen abzuleiten, sondern, wenn möglich, aus mehreren so combinirten, dass die zufällig begangenen Fehler sich gegenseitig, so weit es geht, vernichtet haben. Solche Beobachtungen nämlich, welche nur um den Zwischenraum weniger Tage auseinander liegen — oder, nach Lage der Sache, sogar um einen Zwischenraum von 15 oder 20 Tagen — werden bei der Rechnung nicht als eben so viele, verschiedene Positionen zu verwenden sein, sondern es wird vielmehr aus ihnen eine einzige Position abgeleitet werden, welche unter allen gleichsam die mittlere ist und deshalb eine bei weitem grössere Genauigkeit gewährt, als die einzelnen, gesondert betrachteten Beobachtungen. Dies Verfahren stützt sich auf folgende Principien.

Die aus den angenäherten Elementen berechneten geocentrischen Oerter des Himmelskörpers dürfen von den wahren Oertern nur wenig abweichen, und die Differenzen zwischen beiden dürfen nur sehr langsamen Aenderungen unterliegen, so dass sie im Verlaufe von wenigen Tagen nahezu wie Constanten behandelt, oder dass wenigstens ihre Aenderungen als den Zeiten proportional angesehen werden können. Wären demnach die Beobachtungen völlig fehlerfrei, so würden die den Zeiten t, t', t'', t''' etc. entsprechenden Differenzen zwischen den beobachteten und den aus den Elementen berechneten Oertern, d. h. die Differenzen der beobachteten und berechneten Längen und Breiten, oder Rectascensionen und Declina-

tionen, entweder hinlänglich gleiche oder wenigstens gleichmässig und sehr langsam wachsende oder abnehmende Grössen sein. Es mögen z. B. jenen Zeiten die beobachteten Rectascensionen α, α', α'', α''' etc. entsprechen, berechnet aber seien $\alpha + \delta$, $\alpha' + \delta'$, $\alpha'' + \delta''$, $\alpha''' + \delta'''$ etc.; alsdann werden die Unterschiede δ, δ', δ'', δ''' etc. von den wahren Abweichungen der Elemente nur in so weit verschieden sein, als die Beobachtungen selbst fehlerhaft sind; darf man also jene Abweichungen für alle diese Beobachtungen als constant ansehen, so werden die Werthe δ, δ', δ'', δ''' etc. eben so viele verschiedene Bestimmungen derselben Grösse darstellen, als deren verbesserten Werth man deshalb das arithmetische Mittel aus jenen Bestimmungen annehmen darf, so lange wenigstens kein Grund vorliegt, eine oder die andere zu bevorzugen. Glaubt man aber, den einzelnen Beobachtungen nicht denselben Genauigkeitsgrad beilegen zu dürfen, so nehme man an, dass der Genauigkeitsgrad bei den einzelnen bezw. den Zahlen e, e', e'', e''' etc. proportional zu schätzen sei, d. h. dass Fehler, welche diesen Zahlen umgekehrt proportional sind, bei den Beobachtungen gleich leicht hätten begangen werden können; dann wird nach den unten anzugebenden Principien der mittlere wahrscheinlichste Werth nicht mehr das einfache arithmetische Mittel, sondern

$$= \frac{e^2\delta + e'^2\delta' + e''^2\delta'' + e'''^2\delta''' + \text{etc.}}{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \text{etc.}}$$

sein. Setzt man nun diesen mittleren Werth $= \Delta$, so wird man für die wahren Rectascensionen bezw. $\alpha + \delta - \Delta$, $\alpha' + \delta' - \Delta$, $\alpha'' + \delta'' - \Delta$, $\alpha''' + \delta''' - \Delta$ etc. annehmen dürfen, und dann wird es gleichgültig sein, welche man in der Rechnung benutzt. Wenn aber entweder die Beobachtungen durch einen allzugrossen Zeitraum von einander getrennt sind, oder wenn hinlänglich angenäherte Elemente der Bahn noch nicht vorliegen, so dass man ihre Abweichungen nicht für alle Beobachtungen als constant ansehen darf, so ist leicht ersichtlich, dass hierdurch kein anderer Unterschied entsteht, als dass die so gefundene mittlere Abweichung nicht sowohl für alle Beobachtungen gemeinsam zu gelten hat, sondern dass sie vielmehr auf eine gewisse mittlere Zeit zu beziehen ist, welche man aus den einzelnen Zeitmomenten ebenso ableiten muss, wie Δ aus den einzelnen Abweichungen, im allgemeinen also auf die Zeit

$$\frac{e^2t + e'^2t' + e''^2t'' + e'''^2t''' + \text{etc.}}{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \text{etc.}}.$$

Will man daher die grösste Genauigkeit erlangen, so wird der geocentrische Ort für dieselbe Zeit aus den Elementen zu berechnen und alsdann von dem mittleren Fehler Δ zu befreien sein, so dass eine möglichst genaue Position hervorgeht; zumeist wird es jedoch weitaus genügen, wenn man den mittleren Fehler auf die der mittleren Zeit nächste Beobachtung bezieht. Was wir hier von den Rectascensionen gesagt haben, gilt ebenso von den Declinationen, oder, wenn man lieber will, von den Längen und Breiten; es wird aber immer vortheilhafter sein, unmittelbar die aus den Elementen berechneten Rectascensionen und Declinationen mit den beobachteten zu vergleichen; so gewinnen wir nämlich nicht nur eine raschere Rechnung, besonders wenn wir die in den Art. 53. bis 60. auseinandergesetzten Methoden benutzen, sondern jene Methode empfiehlt sich ausserdem aus dem Grunde, weil wir auch unvollständige Beobachtungen gebrauchen können, und weil ausserdem, wenn wir Alles auf Längen und Breiten beziehen würden, zu befürchten wäre, dass eine Beobachtung, welche in Bezug auf Rectascension richtig, in Bezug auf Declination schlecht angestellt ist (oder umgekehrt), in beiden Beziehungen verschlechtert und somit ganz unbrauchbar würde. — Uebrigens wird nach den bald zu entwickelnden Principien der dem so gefundenen Mittel beizulegende Grad der Genauigkeit $= \sqrt{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \text{etc.}}$ sein, so dass vier oder neun gleich genaue Beobachtungen erforderlich sind, wenn sich das Mittel der doppelten oder dreifachen Genauigkeit erfreuen soll, und so weiter.

174.

Wenn man die Bahn eines Himmelskörpers nach den in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Methoden aus drei oder vier derartigen geocentrischen Positionen bestimmt hat, welche selbst einzeln nach der Regel des vorhergehenden Art. aus mehreren Beobachtungen gebildet waren, so wird diese Bahn zwischen allen diesen Beobachtungen gleichsam die Mitte halten, und in den Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Oertern wird keine Spur einer Regelmässigkeit übrig bleiben, welche sich durch Verbesserung der Elemente beseitigen oder merklich abschwächen liesse. So lange nun der ganze Vorrath der Beobachtungen keinen allzugrossen Zeitraum umfasst, wird man auf diese Weise das erwünschteste Zusammenstimmen der Elemente mit allen Beobachtungen erreichen können, wenn man nur drei oder vier gleichsam

normale Positionen geschickt auswählt. Bei der Bestimmung der Bahnen neuer Kometen oder Planeten, deren Beobachtungen ein Jahr noch nicht überschreiten, werden wir durch diese Methode meist so viel erreichen, als die Natur der Sache selbst erlaubt. Ist daher die zu bestimmende Bahn um einen beträchtlichen Winkel gegen die Ekliptik geneigt, so leite man sie im allgemeinen aus drei Beobachtungen ab, welche wir möglichst weit entfernt von einander wählen; wenn wir dabei aber zufällig auf einen der oben ausgeschlossenen Fälle (Art. 160. bis 162.) gerathen, oder wenn die Neigung der Bahn allzuklein erscheint, so werden wir die Bestimmung aus vier Positionen vorziehen, welche wir ebenfalls so weit wie möglich von einander entfernt annehmen.

Ist aber bereits eine längere, mehrere Jahre umfassende Beobachtungsreihe vorhanden, so wird man aus ihr mehrere Normalörter ableiten können, und man würde daher der grössten Genauigkeit wenig Rechnung tragen, wollte man zur Bestimmung der Bahn nur drei oder vier Positionen aussuchen, und alle übrigen gänzlich vernachlässigen. Man wird sich vielmehr in einem solchen Falle, wenn man die höchste Genauigkeit erlangen will, Mühe geben, so viele ausgesuchte Positionen wie möglich zusammenzustellen und zu benutzen. Dann werden also mehr Daten vorhanden sein, als zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich sind; alle diese Daten werden aber Fehlern, wenn auch nur kleinen, unterworfen sein, so dass es im allgemeinen unmöglich ist, allen völlig zu genügen. Da nun kein Grund vorhanden ist, weshalb man aus diesen Daten diese oder jene sechs als absolut genau annehmen soll, sondern da man vielmehr nach den Principien der Wahrscheinlichkeit bei allen ohne Unterschied grössere oder kleinere Fehler als gleich möglich voraussetzen muss, und da ferner im allgemeinen geringere Fehler häufiger begangen werden als gröbere, so ist es offenbar, dass eine solche Bahn, welche zwar sechs Daten vollkommen befriedigt, von den übrigen aber mehr oder weniger abweicht, für eine mit den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung weniger übereinstimmende zu halten ist, als eine andere, welche zwar auch von jenen sechs Daten um ein Geringes unterschieden ist, desto besser aber mit den übrigen zusammenstimmt. Die Aufsuchung der Bahn, welche im strengen Sinn die *grösste* Wahrscheinlichkeit für sich hat, wird von der Kenntniss des Gesetzes abhängen, nach welchem die Wahrscheinlichkeit wachsender Fehler abnimmt; dieses Gesetz hängt aber von so vielen unbestimmten oder zweifelhaften — auch

physiologischen — Erwägungen ab, welche der Rechnung nicht unterworfen werden können, dass man ein solches wohl kaum jemals in irgend einem Falle der praktischen Astronomie richtig anzugeben vermag. Nichtsdestoweniger wird die Aufsuchung des Zusammenhangs zwischen diesem Gesetz und der wahrscheinlichsten Bahn, welche wir nunmehr in grösster Allgemeinheit unternehmen wollen, keineswegs für eine unfruchtbare Speculation zu halten sein.

175.

Zu diesem Zweck steigen wir von unserer besonderen Aufgabe zu einer ganz allgemeinen Untersuchung auf, welche sich bei jeder Anwendung der Mathematik auf naturwissenschaftliche Fragen sehr fruchtbar erweist. Es seien V, V′, V″ etc. Funktionen der Unbekannten p, q, r, s etc., μ die Anzahl dieser Funktionen, ν die Anzahl der Unbekannten; wir setzen voraus, als Werthe der Funktionen seien durch unmittelbare Beobachtungen $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. gefunden worden. Im allgemeinen wird daher die Entwickelung der Werthe der Unbekannten sich als unbestimmte, bestimmte oder überbestimmte Aufgabe darstellen, jenachdem $\mu < \nu$, $\mu = \nu$ oder $\mu > \nu$ ist*). Hier wird nur von dem letzten Fall die Rede sein, in welchem offenbar eine genaue Darstellung sämmtlicher Beobachtungen nur dann möglich wäre, wenn letztere alle absolut fehlerfrei wären. Da dies aber in Wirklichkeit nicht stattfindet, so wird jedes Werthsystem der Unbekannten p, q, r, s etc. für möglich zu halten sein, aus welchem sich Werthe der Funktionen $M - V$, $M' - V'$, $M'' - V''$ etc. ergeben, welche nicht grösser sind als die Grenzen der Fehler, die bei jenen Beobachtungen begangen werden konnten, was jedoch keineswegs so zu verstehen ist, als ob diese einzelnen möglichen Systeme einen gleichen Grad von Wahrscheinlichkeit besässen.

Wir nehmen zuerst an, es sei bei allen Beobachtungen die Sachlage derartig gewesen, dass kein Grund vorhanden ist, die eine

*) Wenn im dritten Falle die Funktionen V, V′, V″ etc. so beschaffen wären, dass man $\mu + 1 - \nu$ von ihnen oder mehrere als Funktionen der übrigen ansehen könnte, so würde die Aufgabe in Bezug auf diese Funktionen immer noch überbestimmt, in Bezug auf die Grössen p, q, r, s etc. aber unbestimmt sein; man würde nämlich ihre Werthe nicht einmal dann bestimmen können, wenn die Werthe der Funktionen V, V′, V″ etc. absolut genau gegeben wären. Diesen Fall schliessen wir aber von unserer Untersuchung aus.

für weniger genau als die andere zu erachten, oder dass man gleich grosse Fehler bei den einzelnen für gleich wahrscheinlich halten muss. Die Wahrscheinlichkeit, welche irgend einem Fehler Δ beizulegen ist, wird daher durch eine Funktion von Δ ausgedrückt, welche wir mit $\varphi(\Delta)$ bezeichnen wollen. Wenn man nun auch diese Funktion nicht genau angeben kann, so kann man doch wenigstens versichern, dass ihr Werth ein Maximum für $\Delta = 0$ werden müsse, dass er im allgemeinen für gleiche und entgegengesetzte Werthe von Δ der gleiche sei, und endlich, dass er verschwinde, wenn man für Δ den grössten Fehler oder einen noch grösseren Werth annimmt. Eigentlich ist deshalb $\varphi(\Delta)$ zu der Gattung der unstetigen Funktionen zu rechnen, und wenn wir uns erlauben, zum praktischen Gebrauch an ihrer Stelle eine analytische Funktion einzuführen, so muss diese so beschaffen sein, dass sie von $\Delta = 0$ ab nach beiden Seiten gleichsam asymptotisch gegen 0 convergirt, so dass sie ausserhalb der betreffenden Grenze als wirklich verschwindend angesehen werden kann. Ferner wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ liege, welche um die unendlich kleine Differenz $d\Delta$ von einander abstehen, durch $\varphi(\Delta)\,d\Delta$ auszudrücken sein; hiernach wird allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen D und D′ liege, durch das von $\Delta = D$ bis $\Delta = D'$ genommene Integral $\int\varphi(\Delta)\,d\Delta$ dargestellt. Nimmt man dieses Integral von dem grössten negativen Werthe bis zum grössten positiven Werthe von Δ, oder allgemeiner von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$, so muss es nothwendig $= 1$ werden.

Nehmen wir also an, irgend ein bestimmtes Werthsystem der Grössen p, q, r, s etc. sei gegeben, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass für V aus der Beobachtung der Werth M hervorgehen werde, durch $\varphi(M - V)$ ausgedrückt, indem man in V für p, q, r, s etc. ihre Werthe einsetzt; ebenso drücken $\varphi(M' - V')$, $\varphi(M'' - V'')$ etc. die Wahrscheinlichkeiten aus, dass sich aus den Beobachtungen für die Funktionen V′, V″ etc. die Werthe M′, M″ etc. ergeben werden. Deshalb wird, wenn man nur alle Beobachtungen als von einander unabhängige Ergebnisse ansehen darf, das Produkt

$$\varphi(M - V)\,\varphi(M' - V')\,\varphi(M'' - V'')\ \text{etc.} = \Omega$$

die Erwartung oder die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, dass alle diese Werthe gleichzeitig aus den Beobachtungen hervorgehen werden.

176.

So wie nun bei Annahme irgend welcher bestimmten Werthe der Unbekannten jedem System von Werthen der Funktionen V, V′, V″ etc. vor Anstellung der Beobachtung eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zukommt, ebenso wird umgekehrt, nachdem aus den Beobachtungen bestimmte Werthe der Funktionen erhalten sind, für die einzelnen Werthsysteme der Unbekannten, aus welchen jene hervorgehen konnten, sich eine bestimmte Wahrscheinlichkeit ergeben; offenbar sind nämlich diejenigen Systeme für wahrscheinlicher zu halten, bei welchen die Erwartung des erhaltenen Ergebnisses die grössere gewesen war. Die Schätzung dieser Wahrscheinlichkeit stützt sich auf folgenden Lehrsatz:

Wenn bei irgend einer zu Grunde gelegten Hypothese H *die Wahrscheinlichkeit irgend eines bestimmten Ergebnisses* E *gleich* h *ist, bei Annahme einer anderen, die erstere ausschliessenden und an sich gleich wahrscheinlichen Hypothese* H′ *aber die Wahrscheinlichkeit desselben Ergebnisses gleich* h′ *ist: dann behaupte ich, wenn das Ergebniss* E *wirklich eingetreten ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass* H *die richtige Hypothese gewesen, sich zur Wahrscheinlichkeit, dass* H′ *die richtige Hypothese gewesen, verhalte wie* h *zu* h′.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, durch Unterscheidung aller Umstände, von denen es abhängt, ob H oder H′ oder eine andere Hypothese Platz greift, um das Ergebniss E oder ein anderes hervorzubringen, sei ein gewisses System der verschiedenen Fälle aufgestellt, welche einzeln für sich (d. h. so lange es ungewiss ist, ob das Ergebniss E oder ein anderes eintreten werde) als gleich wahrscheinlich betrachtet werden müssen, und diese Fälle seien so eingetheilt,

dass unter ihnen gefunden werden	bei denen die Hypothese statthaben muss	mit solchen Modificationen, dass das Ergebniss eintreten muss
m	H	E
n	H	von E verschieden
m'	H′	E
n'	H′	von E verschieden
m''	von H und H′ verschieden	E
n''	von H und H′ verschieden	von E verschieden.

Dann wird $h = \frac{m}{m+n}$, $h' = \frac{m'}{m'+n'}$ sein; ferner war vor Bekanntwerden des Ergebnisses die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H $= \frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$, nach dem Bekanntwerden des Ergebnisses aber, wo die Fälle n, n', n'' aus der Anzahl der möglichen ausscheiden, wird die Wahrscheinlichkeit derselben Hypothese $= \frac{m}{m+m'+m''}$ sein; ebenso wird die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H′ vor und nach dem Ergebniss bezw. durch $\frac{m'+n'}{m+n+m'+n'+m''+n''}$ und $\frac{m'}{m+m'+m''}$ ausgedrückt; da nun den Hypothesen H und H′ vor dem Bekanntwerden des Ergebnisses dieselbe Wahrscheinlichkeit beigelegt ist, so wird also

$$m + n = m' + n'$$

sein, woraus sich die Richtigkeit des Lehrsatzes von selbst ergiebt.

So lange wir nun annehmen, dass ausser den Beobachtungen V = M, V′ = M′, V″ = M″ etc. keine anderen Daten zur Bestimmung der Unbekannten vorhanden seien, und dass deshalb alle Werthsysteme dieser Unbekannten vor jenen Beobachtungen gleich wahrscheinlich gewesen seien, so wird offenbar die Wahrscheinlichkeit eines jeden bestimmten Systems nach jenen Beobachtungen dem Ω proportional sein. Dies ist so zu verstehen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werthe der Unbekannten bezw. zwischen den unendlich nahen Grenzen p und $p + dp$, q und $q + dq$, r und $r + dr$, s und $s + ds$ etc. liegen, durch $\lambda\, \Omega\, dp\, dq\, dr\, ds \ldots$ ausgedrückt werde, wo λ eine von p, q, r, s etc. unabhängige, constante Grösse sein wird. Und zwar wird offenbar $\frac{1}{\lambda}$ der Werth des Integrals ν^{ter} Ordnung $\int^{(\nu)} \Omega\, dp\, dq\, dr\, ds \ldots$ sein, wenn man die einzelnen Variabeln p, q, r, s etc. von dem Werthe $-\infty$ bis zum Werthe $+\infty$ ausdehnt.

177.

Hieraus folgt schon von selbst, dass das wahrscheinlichste Werthsystem der Grössen p, q, r, s etc. dasjenige sein wird, bei welchem Ω den grössten Werth erlangt, und dass es deshalb aus den ν Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} = 0 \text{ etc.}$$

zu ermitteln ist. Diese Gleichungen nehmen, wenn man $M - V = v$, $M' - V' = v'$, $M'' - V'' = v''$ etc. und $\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)\,d\Delta} = \varphi'(\Delta)$ setzt, folgende Form an:

$$\frac{dv}{dp}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dp}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dp}\varphi'(v'') + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{dv}{dq}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dq}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dq}\varphi'(v'') + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{dv}{dr}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dr}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dr}\varphi'(v'') + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{dv}{ds}\varphi'(v) + \frac{dv'}{ds}\varphi'(v') + \frac{dv''}{ds}\varphi'(v'') + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Hieraus wird man also durch Elimination die völlig bestimmte Lösung der Aufgabe ableiten können, sobald nur die Natur der Funktion φ' bekannt ist. Da diese aber a priori nicht definirt werden kann, so wollen wir die Sache von einer anderen Seite angreifen, und nachforschen, auf welcher stillschweigend gleichsam als Grundlage angenommenen Funktion ein landläufiges Princip eigentlich beruht, dessen Vortrefflichkeit allgemein anerkannt ist. Wie ein Axiom pflegt man nämlich die Hypothese zu behandeln, wenn irgend eine Grösse durch mehrere unmittelbare, unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellte Beobachtungen bestimmt worden ist, dass alsdann das arithmetische Mittel zwischen allen beobachteten Werthen, wenn auch nicht mit absoluter Strenge, so doch wenigstens sehr nahe den wahrscheinlichsten Werth gebe, so dass es immer das sicherste ist, an diesem festzuhalten. Setzen wir daher $V = V' = V''$ etc. $= p$, so wird allgemein

$$\varphi'(M - p) + \varphi'(M' - p) + \varphi'(M'' - p) + \text{etc.} = 0$$

sein müssen, wenn für p der Werth $\frac{1}{\mu}(M + M' + M'' + \text{etc.})$ eingesetzt wird, was für eine ganze positive Zahl μ auch sein möge. Nimmt man also $M' = M''$ etc. $= M - \mu N$, so wird allgemein, d. h. für jeden ganzen positiven Werth von μ,

$$\varphi'[(\mu - 1)N] = (1 - \mu)\,\varphi'(-N)$$

sein, woraus man leicht entnimmt, dass allgemein $\frac{\varphi'(\Delta)}{\Delta}$ eine constante Grösse sein müsse, welche wir mit k bezeichnen wollen. Hieraus folgt $\log\varphi(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2 + \text{Const.}$, oder wenn wir die Basis der

hyperbolischen Logarithmen mit e bezeichnen, und Const. $= \log \varkappa$ setzen,

$$\varphi(\Delta) = \varkappa e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}.$$

Ferner ist leicht einzusehen, dass k nothwendig negativ sein muss, damit Ω wirklich ein Maximum werden könne, weshalb wir

$$\frac{1}{2} k = -h^2$$

setzen; und da nach einem zuerst von *Laplace* gefundenen, eleganten Lehrsatz das von $\Delta = -\infty$ bis $\Delta = +\infty$ genommene Integral

$$\int e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

wird (wo π den halben Kreisumfang für den Radius 1 bezeichnet), so wird unsere Funktion

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}.$$

178.

Die soeben ermittelte Funktion kann zwar in aller Strenge die Wahrscheinlichkeiten der Fehler sicher nicht darstellen; denn da die möglichen Fehler immer in bestimmten Grenzen eingeschlossen sind, so müsste die Wahrscheinlichkeit grösserer Fehler sich immer $= 0$ ergeben, während unsere Formel immer einen endlichen Werth liefert. Jedoch ist dieser Mangel, mit dem jede analytische Funktion ihrer Natur nach behaftet sein muss, für alle praktischen Zwecke ohne alle Bedeutung, da, sobald nur erst $h\Delta$ einen beträchtlichen Werth erlangt hat, der Werth unserer Funktion so schnell abnimmt, dass man ihn sicher der Null gleichkommend annehmen darf. Die Fehlergrenzen selbst mit völliger Strenge anzugeben, wird überdies die Natur der Sache niemals gestatten.

Uebrigens wird man die Constante h als das Maass für die Genauigkeit der Beobachtungen ansehen können. Wenn man nämlich annimmt, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ werde in irgend einer Gruppe von Beobachtungen durch

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

in einer anderen Gruppe von genaueren oder ungenaueren Beobach-

tungen aber durch

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2}$$

ausgedrückt, so wird die Erwartung, es sei bei irgend einer Beobachtung der ersteren Gruppe der Fehler in den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten, durch das von $\Delta = -\delta$ bis $\Delta = +\delta$ genommene Integral

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

ausgedrückt, und ebenso wird die Erwartung, dass der Fehler irgend einer Beobachtung der letzteren Gruppe die Grenzen $-\delta'$ und $+\delta'$ nicht überschreite, durch das von $\Delta = -\delta'$ bis $\Delta = +\delta'$ genommene Integral

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} d\Delta$$

ausgedrückt; beide Integrale werden aber offenbar einander gleich, sobald man $h\delta = h'\delta'$ hat. Wenn also z. B. $h' = 2h$ ist, so kann in der ersten Gruppe ebenso leicht ein doppelter Fehler begangen werden, wie in der zweiten ein einfacher, in welchem Falle man den letzteren Beobachtungen nach dem allgemeinen Sprachgebrauch die doppelte Genauigkeit zuschreibt.

179.

Nun werden wir Folgerungen aus diesem Gesetze ziehen. Damit das Produkt

$$\Omega = h^\mu \pi^{-\frac{1}{2}\mu} e^{-h^2(v^2 + v'^2 + v''^2 + \text{etc.})}$$

ein Maximum werde, muss offenbar die Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc. ein Minimum werden. *Das wahrscheinlichste Werthsystem der Unbekannten* p, q, r, s etc. *wird daher dasjenige sein, bei welchem die Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Funktionen* V, V′, V″ etc. *die kleinste Summe ergeben*, wenn nur bei allen Beobachtungen der gleiche Grad von Genauigkeit vorausgesetzt werden darf.

Dies Princip, welches bei allen Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften sehr häufig von Nutzen ist, muss überall mit demselben Recht als Axiom gelten, mit welchem das arithmetische Mittel zwischen mehreren beobachteten Werthen derselben Grösse als wahrscheinlichster Werth angenommen wird.

Auf Beobachtungen von *ungleicher* Genauigkeit kann unser Princip jetzt ohne jede Mühe ausgedehnt werden. Wenn nämlich das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen, vermittelst deren $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. gefunden ist, bezw. durch h, h', h'' etc. ausgedrückt wird, d. h. wenn man voraussetzt, dass Fehler, welche diesen Grössen umgekehrt proportional sind, bei jenen Beobachtungen gleich leicht begangen werden können, so wird dies offenbar auf dasselbe hinauskommen, als wenn durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit (deren Maass $= 1$ ist) die Werthe der Funktionen hV, $h'V'$, $h''V''$ etc. unmittelbar $= hM$, $h'M'$, $h''M''$ etc. gefunden worden wären; deshalb wird das wahrscheinlichste Werthsystem für die Grössen p, q, r, s etc. dasjenige sein, bei welchem die Summe $h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 +$ etc. d. h. *bei welchem die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den wirklich beobachteten und den berechneten Werthen multiplicirt mit den ihren Genauigkeitsgrad messenden Zahlen ein Minimum wird.* Hiernach ist es nicht einmal nothwendig, dass die Funktionen V, V', V'' etc. sich auf homogene Grössen beziehen, sondern sie können auch heterogene (z. B. Bogen- und Zeitsecunden) darstellen, wenn man nur das Verhältniss der Fehler zu schätzen vermag, welche bei den einzelnen gleich leicht begangen werden konnten.

180.

Das in dem vorhergehenden Art. dargestellte Princip empfiehlt sich auch aus dem Grunde, weil die numerische Bestimmung der Unbekannten zu einem sehr bequemen Algorithmus führt, wenn die Funktionen V, V', V'' etc. lineare sind. Wir nehmen an, es sei

$$\begin{aligned} M - V &= v = -m + ap + bq + cr + ds + \text{etc.} \\ M' - V' &= v' = -m' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} \\ M'' - V'' &= v'' = -m'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., und setzen

$$\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= P \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= Q \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= R \\ dv + d'v' + d''v'' + \text{etc.} &= S \end{aligned}$$

etc. Dann werden die ν Gleichungen des Art. 177., aus welchen die Werthe der Unbekannten zu bestimmen sind, offenbar folgende sein:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0 \quad \text{etc.,}$$

wenigstens wenn wir die Beobachtungen als gleich gut voraussetzen, auf welchen Fall nach den Anweisungen des vorigen Art. die übrigen zurückgeführt werden können. Es sind also eben so viele lineare Gleichungen vorhanden, als Unbekannte zu bestimmen sind, woraus deren Werthe durch die gewöhnliche Elimination abgeleitet werden.

Wir wollen jetzt nachsehen, ob diese Elimination immer möglich ist, oder ob jemals die Lösung unbestimmt oder sogar unmöglich werden kann. Aus der Theorie der Elimination weiss man, dass der zweite oder dritte Fall dann eintreten werde, wenn aus den Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ etc., bei Auslassung von einer derselben, eine Gleichung gebildet werden kann, die entweder mit der ausgelassenen identisch ist, oder ihr widerstreitet, oder was auf dasselbe hinaus kommt, wenn man eine lineare Funktion $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S +$ etc. angeben kann, welche entweder identisch $= 0$ ist, oder wenigstens keine einzige der Unbekannten p, q, r, s etc. enthält. Wir nehmen also an, es werde

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.} = \varkappa\,.$$

Man erhält ohne weiteres die identische Gleichung

$$(v + m)\, v + (v' + m')\, v' + (v'' + m'')\, v'' + \text{etc.} = pP + qQ + rR + sS + \text{etc.}$$

Wenn wir demnach annehmen, dass die Funktionen v, v', v'' etc. durch die Substitutionen $p = \alpha x$, $q = \beta x$, $r = \gamma x$, $s = \delta x$ etc. bezw. in $-m + \lambda x$, $-m' + \lambda' x$, $-m'' + \lambda'' x$ etc. übergehen, so wird offenbar die identische Gleichung entstehen:

$$(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.})\, x^2 - (\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \text{etc.})\, x = \varkappa x,$$

d. h. es wird

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = 0, \quad \varkappa + \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \text{etc.} = 0;$$

hiernach wird aber nothwendigerweise $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$ etc. und $\varkappa = 0$ sein müssen. Hieraus erhellt, dass alle Funktionen V, V', V'' etc. so beschaffen sind, dass sich ihre Werthe nicht ändern, wenn die Grössen p, q, r, s etc. um beliebige Grössen zunehmen oder abnehmen, welche den Zahlen α, β, γ, δ etc. proportional sind; dass aber solche Fälle, in welchen die Bestimmung der Unbekannten offenbar auch dann nicht einmal möglich wäre, wenn selbst die wahren Werthe der Funktionen V, V', V'' etc. gegeben sein würden, nicht hierher gehören, daran haben wir schon oben erinnert.

Uebrigens lassen sich auf den hier betrachteten Fall alle

übrigen, wo die Funktionen V, V′, V″ etc. nicht linear sind, leicht zurückführen. Bezeichnen wir nämlich mit π, χ, ϱ, σ etc. angenäherte Werthe der Unbekannten p, q, r, s etc. (welche wir leicht ableiten können, indem wir von den μ Gleichungen $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. zunächst nur ν benutzen), und führen wir an Stelle der Unbekannten andere p', q', r', s' etc. ein, indem wir $p = \pi + p'$, $q = \chi + q'$, $r = \varrho + r'$, $s = \sigma + s'$ etc. setzen, so werden offenbar die Werthe dieser neuen Unbekannten so klein sein, dass man ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen darf, wodurch die Gleichungen von selbst linear werden. Wenn aber alsdann nach beendigter Rechnung die Werthe der Unbekannten p', q', r', s' etc. wider Erwarten sich so gross ergeben, dass die Vernachlässigung der Quadrate und Produkte nicht gefahrlos erschiene, so wird eine Wiederholung derselben Operation (indem man an Stelle der π, χ, ϱ, σ etc. die verbesserten Werthe der p, q, r, s etc. nimmt) schnell Abhülfe schaffen.

181.

So oft demnach nur eine einzige Unbekannte p vorhanden ist, zu deren Bestimmung die Werthe der Funktionen $ap + n$, $a'p + n'$, $a''p + n''$ etc. bezw. $= M$, M', M'' etc., und zwar durch gleich genaue Beobachtungen gefunden sind, so wird der wahrscheinlichste Werth des p

$$= \frac{am + a'm' + a''m'' + \text{etc.}}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \text{etc.}} = A$$

sein, wenn man m, m', m'' etc. bezw. für $M - n$, $M' - n'$, $M'' - n''$ etc. schreibt.

Um nun den Grad der Genauigkeit zu schätzen, die wir bei diesem Werthe anzunehmen haben, setzen wir voraus, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ bei den Beobachtungen werde durch

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$$

ausgedrückt. Hiernach wird die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth des p gleich $A + p'$ sei, der Funktion

$$e^{-h^2[(ap - m)^2 + (a'p - m')^2 + (a''p - m'')^2 + \text{etc.}]}$$

proportional sein, wenn man $A + p'$ für p einsetzt. Der Exponent dieser Funktion kann auf die Form

$$-h^2(a^2 + a'^2 + a''^2 + \text{etc.})(p^2 - 2pA + B)$$

gebracht werden, wo B von p unabhängig ist; deshalb wird die Funktion selbst zu

$$e^{-h^2(a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.})p'^2}$$

proportional sein. Offenbar ist also dem Werthe A derselbe Grad der Genauigkeit zuzuschreiben, als wenn er durch eine unmittelbare Beobachtung gefunden wäre, deren Genauigkeit sich zur Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen verhält wie

$h\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.}}$ zu h, oder wie $\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.}}$ zu 1.

182.

Der Untersuchung über den Grad der Genauigkeit, welchen man den Werthen der Unbekannten, wenn ihrer mehrere vorhanden sind, beilegen muss, ist eine genauere Betrachtung der Funktion $v^2+v'^2+v''^2+\text{etc.}$, die wir mit W bezeichnen wollen, vorauszuschicken.

I. Setzen wir

$$\frac{1}{2}\frac{dW}{dp}=p'=\lambda+\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s+\text{etc.},$$

und

$$W-\frac{p'^2}{\alpha}=W',$$

so wird offenbar $p'=P$, und da

$$\frac{dW'}{dp}=\frac{dW}{dp}-\frac{2p'}{\alpha}\frac{dp'}{dp}=0$$

ist, so muss die Funktion W' von p unabhängig sein. Der Coefficient $\alpha=a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.}$ wird offenbar immer eine positive Grösse sein.

II. Setzen wir ebenso

$$\frac{1}{2}\frac{dW'}{dq}=q'=\lambda'+\beta'q+\gamma'r+\delta's+\text{etc.},$$

und

$$W'-\frac{q'^2}{\beta'}=W'',$$

so wird

$$q'=\frac{1}{2}\frac{dW}{dq}-\frac{p'}{\alpha}\frac{dp'}{dq}=Q-\frac{\beta}{\alpha}p',\text{ und }\frac{dW''}{dq}=0$$

sein, wonach offenbar die Funktion W'' von p und q unabhängig

sein wird. Dies würde nicht stattfinden, wenn $\beta' = 0$ werden könnte. Offenbar ergiebt sich aber W′ aus $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc., indem man die Grösse p aus v, v', v'' etc. mit Hülfe der Gleichung $p' = 0$ eliminirt; sonach wird β' die Summe der Coefficienten von q^2 in v^2, v'^2, v''^2 etc. nach jener Elimination sein; diese einzelnen Coefficienten selbst sind aber Quadrate und können nicht alle zugleich verschwinden, abgesehen von dem oben ausgeschlossenen Fall, in welchem die Unbekannten unbestimmt bleiben. Es muss β' deshalb offenbar eine positive Grösse sein.

III. Setzen wir ferner

$$\frac{1}{2}\frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma'' r + \delta'' s + \text{etc.},$$

und

$$W'' - \frac{r'^2}{\gamma''} = W''',$$

so wird

$$r' = R - \frac{\gamma}{\alpha} p' - \frac{\gamma'}{\beta'} q',$$

und W‴ sowohl von p, als von q und r unabhängig sein. Dass übrigens der Coefficient γ'' nothwendig positiv ist, wird analog wie in II. bewiesen. Man sieht nämlich leicht ein, dass γ'' die Summe der Coefficienten von r^2 in v^2, v'^2, v''^2 etc. ist, nachdem man die Grössen p und q mit Hülfe der Gleichungen $p' = 0$, $q' = 0$ aus v, v', v'' etc. eliminirt hat.

IV. Auf dieselbe Weise wird, wenn wir

$$\frac{1}{2}\frac{dW'''}{ds} = s' = \lambda''' + \delta''' s + \text{etc.}, \quad \text{und} \quad W'''' = W''' - \frac{s'^2}{\delta'''}$$

setzen,

$$s' = S - \frac{\delta}{\alpha} p' - \frac{\delta'}{\beta'} q' - \frac{\delta''}{\gamma''} r',$$

W⁗ von p, q, r, s unabhängig und δ''' eine positive Grösse sein.

V. Man kann, wenn es ausser p, q, r, s noch andere Unbekannte giebt, ebenso weiter gehen, so dass man endlich

$$W = \frac{1}{\alpha} p'^2 + \frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \text{etc.} + \text{Const.}$$

erhält, wo alle Coefficienten α, β', γ'', δ''' etc. positive Grössen sein werden.

VI. Die Wahrscheinlichkeit irgend eines Systems von bestimmten Werthen der Grössen p, q, r, s etc. ist nun der Funktion

$e^{-h^2 W}$ proportional, so dass, wenn der Werth der Grösse p unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit eines Systems bestimmter Werthe der übrigen dem von $p = -\infty$ bis $p = +\infty$ ausgedehnten Integral

$$\int e^{-h^2 W} dp$$

proportional sein wird, welches nach dem Theorem von *Laplace*

$$= h^{-1} \alpha^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-h^2 \left[\frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \text{etc.}\right]}$$

wird; es wird also die obige Wahrscheinlichkeit der Funktion $e^{-h^2 W'}$ proportional sein. Wenn überdies q ebenso als Variable angesehen wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Systems bestimmter Werthe für r, s etc. dem von $q = -\infty$ bis $q = +\infty$ genommenen Integral

$$\int e^{-h^2 W'} dq$$

proportional, welches

$$= h^{-1} \beta'^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-h^2 \left[\frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \text{etc.}\right]}$$

wird, oder proportional der Funktion $e^{-h^2 W''}$. Wenn man auch r als Variable behandelt, so wird ganz analog die Wahrscheinlichkeit bestimmter Werthe der übrigen s etc. der Funktion $e^{-h^2 W'''}$ proportional sein, und so weiter. Wir wollen annehmen, die Anzahl der Unbekannten steige bis auf vier; dann wird derselbe Schluss auch gelten, wenn sie grösser oder kleiner ist. Der wahrscheinlichste Werth von s wird hier $= -\frac{\lambda'''}{\delta'''}$ sein, und die Wahrscheinlichkeit, dass derselbe sich von dem wahren um die Differenz σ unterscheide, wird der Funktion $e^{-h^2 \delta''' \sigma^2}$ proportional sein, woraus wir schliessen, dass das Maass der jener Bestimmung beizulegenden relativen Genauigkeit durch $\sqrt{\delta'''}$ ausgedrückt wird, wenn das Maass der den ursprünglichen Beobachtungen beizulegenden Genauigkeit $= 1$ gesetzt wird.

183.

Durch die Methode des vorhergehenden Art. wird das Genauigkeitsmaass nur für diejenige Unbekannte bequem ausgedrückt, der beim Geschäft der Elimination der letzte Platz angewiesen ist; um nun diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, empfiehlt es sich,

den Coefficienten δ''' auf andere Weise auszudrücken. Aus den Gleichungen

$$P = p'$$
$$Q = q' + \frac{\beta}{\alpha} p'$$
$$R = r' + \frac{\gamma'}{\beta'} q' + \frac{\gamma}{\alpha} p'$$
$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r' + \frac{\delta'}{\beta'} q' + \frac{\delta}{\alpha} p'$$

folgt, dass die p', q', r', s' durch P, Q, R, S folgendermaassen ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} p' &= P \\ q' &= Q + \mathfrak{A}P \\ r' &= R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P \\ s' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P, \end{aligned}$$

so dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ bestimmte Grössen sind. Es wird daher (wenn wir die Anzahl der Unbekannten auf vier einschränken)

$$s = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''} P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''} Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''} R + \frac{1}{\delta'''} S .$$

Hieraus leiten wir folgenden Schluss ab. Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten p, q, r, s etc., welche durch Elimination aus den Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ etc. abzuleiten sind, werden offenbar, wenn man für den Augenblick P, Q, R, S etc. als Variable betrachtet, demselben Eliminationsverfahren gemäss in linearer Form durch P, Q, R, S etc. ausgedrückt, so dass man erhält

$$\begin{aligned} p &= L + AP + BQ + CR + DS + \text{etc.} \\ q &= L' + A'P + B'Q + C'R + D'S + \text{etc.} \\ r &= L'' + A''P + B''Q + C''R + D''S + \text{etc.} \\ s &= L''' + A'''P + B'''Q + C'''R + D'''S + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Hiernach werden die wahrscheinlichsten Werthe der p, q, r, s etc. offenbar bezw. L, L', L'', L''' etc. sein, und das diesen Bestimmungen zuzuschreibende Genauigkeitsmaass wird bezw. durch

$$\sqrt{\frac{1}{A}}, \sqrt{\frac{1}{B'}}, \sqrt{\frac{1}{C''}}, \sqrt{\frac{1}{D'''}} \text{ etc.}$$

ausgedrückt, wenn die Genauigkeit der ursprünglichen Beobach-

tungen $= 1$ gesetzt ist. Was wir nämlich in Betreff der Bestimmung der Unbekannten s vorher gezeigt haben (bei welcher δ''' dem $\frac{1}{D'''}$ entspricht), lässt sich durch blosse Permutation der Unbekannten auf alle übrigen übertragen.

184.

Um die vorhergehenden Untersuchungen an einem Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es sei durch Beobachtungen, bei denen man eine gleiche Genauigkeit voraussetzen darf, gefunden

$$\begin{aligned} p - q + 2r &= 3 \\ 3p + 2q - 5r &= 5 \\ 4p + q + 4r &= 21, \end{aligned}$$

durch eine vierte aber, der nur die halbe Genauigkeit zuzuschreiben ist, habe sich ergeben

$$-2p + 6q + 6r = 28.$$

An Stelle der letzten Gleichung führen wir daher die folgende ein:

$$-p + 3q + 3r = 14,$$

und nehmen an, diese sei aus einer den früheren an Genauigkeit gleichen Beobachtung hervorgegangen.

Hiernach wird

$$\begin{aligned} P &= 27p + 6q - 88 \\ Q &= 6p + 15q + r - 70 \\ R &= q + 54r - 107, \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination

$$\begin{aligned} 19899\,p &= 49154 + 809\,P - 324\,Q + 6\,R \\ 19899\,q &= 70659 - 324\,P + 1458\,Q - 27\,R \\ 19899\,r &= 38121 + 6\,P - 27\,Q + 369\,R. \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten werden daher

$$\begin{aligned} p &= 2{,}470 \\ q &= 3{,}551 \\ r &= 1{,}916 \end{aligned}$$

sein, und die diesen Bestimmungen zuzuschreibende relative Genauigkeit, wenn die Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen $= 1$ gesetzt ist, wird

$$\text{für } p \ldots \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4{,}96$$

$$\text{für } q \ldots \sqrt{\frac{19899}{1458}} = 3{,}69$$

$$\text{für } r \ldots \sqrt{\frac{19899}{369}} = 7{,}34\,.$$

185.

Der bisher behandelte Gegenstand könnte zu mehreren eleganten, analytischen Untersuchungen Veranlassung geben, bei denen wir uns jedoch hier nicht aufhalten wollen, um uns nicht zu weit von unserem Vorhaben zu entfernen. Aus demselben Grunde müssen wir uns die Auseinandersetzung der Kunstgriffe, durch welche die numerische Rechnung auf einen schneller zum Ziele führenden Algorithmus gebracht werden kann, für eine andere Gelegenheit vorbehalten. Eine einzige Bemerkung wollen wir uns hier anzufügen gestatten. Falls die Anzahl der Funktionen oder der vorgelegten Gleichungen beträchtlich ist, wird die Rechnung deshalb hauptsächlich ein wenig lästiger, weil die Coefficienten, mit welchen die ursprünglichen Gleichungen zu multipliciren sind, um P, Q, R, S etc. abzuleiten, meistens wenig bequeme Decimalbrüche enthalten. Wenn es in einem solchen Falle nicht die Mühe zu lohnen scheint, diese Multiplicationen mit Hülfe der Logarithmentafeln so genau wie möglich auszuführen, so wird es in den meisten Fällen ausreichen, an Stelle dieser Multiplicatoren andere für die Rechnung bequemere anzuwenden, welche von jenen wenig verschieden sind. Diese Vernachlässigung kann keine merklichen Fehler erzeugen, abgesehen von dem einen Falle, wo sich das Genauigkeitsmaass für die Bestimmung der Unbekannten viel geringer ergiebt, als die Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen war.

186.

Uebrigens wird das Princip, dass die Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Grössen die allerkleinste Summe ergeben müssen, auch unabhängig von der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf folgende Weise erwogen werden können.

Wenn die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der beobachteten und von ihnen abhängigen Grössen gleich ist, so kann man jene so bestimmen, dass diesen genau Genüge geschieht. Wenn

aber jene Anzahl kleiner als diese ist, so kann man ein absolut genaues Zusammenstimmen nicht erlangen, insoweit sich die Beobachtungen nicht absoluter Genauigkeit erfreuen. In diesem Falle muss man sich daher Mühe geben, die möglichst beste Uebereinstimmung herzustellen, oder die Differenzen so viel wie möglich zu verkleinern. Diese Forderung enthält aber ihrer Natur nach etwas Unbestimmtes. Wenn nämlich auch ein Werthsystem der Unbekannten, welches *alle* Differenzen bezw. kleiner als ein anderes ergiebt, diesem letzteren zweifelsohne vorzuziehen ist, so bleibt nichtsdestoweniger die Wahl zwischen zwei Systemen, von denen das eine für einige Beobachtungen eine bessere Uebereinstimmung erzeugt, das andere aber für andere, in gewisser Hinsicht unserem Ermessen überlassen, und es können offenbar unzählige Principien vorgeschlagen werden, durch welche die obige Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man die Differenzen zwischen den Beobachtungen und der Rechnung mit Δ, Δ', Δ'' etc., so wird der obigen Bedingung nicht nur genügt, wenn $\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 +$ etc. ein Minimum wird (was unserem Princip entspricht), sondern auch wenn $\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4 +$ etc. oder $\Delta^6 + \Delta'^6 + \Delta''^6 +$ etc. oder allgemein die Summe der Potenzen mit irgend einem beliebigen geraden Exponenten zu einem Minimum wird. Von allen diesen Principien ist aber das unsrige das einfachste, während wir bei den übrigen zu den verwickeltsten Rechnungen geführt werden. Uebrigens ist unser Princip, dessen wir uns schon seit dem Jahre 1795 bedient haben, kürzlich auch von *Legendre* in dem Werke „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806“ aufgestellt worden, woselbst auch mehrere andere Eigenthümlichkeiten dieses Princips auseinandergesetzt sind, welche wir hier der Kürze wegen unterdrücken.

Wenn wir eine Potenz mit einem unendlich grossen, geraden Exponenten annehmen würden, so würden wir auf dasjenige System geführt werden, bei welchem die grössten Differenzen so klein wie möglich werden.

Laplace bedient sich zur Auflösung linearer Gleichungen, deren Anzahl grösser ist als die Anzahl der unbekannten Grössen, eines anderen Princips, welches seiner Zeit schon von *Boscovich* vorgeschlagen war, dass nämlich die Differenzen selbst, aber alle positiv genommen, eine möglichst kleine Summe erzeugen sollen. Es lässt sich leicht zeigen, dass das System der Werthe der Unbekannten,

welches aus diesem Princip allein ermittelt ist, nothwendig*) so vielen Gleichungen aus der Anzahl der vorgelegten genau genügen muss, als Unbekannte vorhanden sind, so dass die übrigen Gleichungen nur in so weit in Betracht kommen, als sie *zur entscheidenden Wahl beitragen;* wenn daher z. B. die Gleichung V = M zu der Anzahl derer gehört, welchen nicht genügt wird, so würde an dem System der nach jenem Princip gefundenen Werthe nichts geändert, wenn man auch an Stelle von M irgend einen anderen beliebigen Werth N beobachtet hätte, wenn nur die Differenzen $M - n$ und $N - n$, wo mit n der berechnete Werth bezeichnet ist, mit demselben Vorzeichen behaftet sind. Uebrigens regulirt *Laplace* jenes Princip in gewisser Hinsicht durch Hinzufügung einer neuen Bedingung: er fordert nämlich, dass die Summe der Differenzen selbst, ohne Aenderung der Vorzeichen, = 0 wird. Hierdurch wird bewirkt, dass die Anzahl der genau dargestellten Gleichungen um eine Einheit kleiner wird als die Anzahl der unbekannten Grössen; gleichwohl wird aber unsere obige Bemerkung immer noch statthaben, wenn nur wenigstens zwei Unbekannte vorhanden waren.

187.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen wenden wir uns wieder zu unserem eigentlichen Vorhaben, um dessentwillen jene angestellt worden sind. Bevor wir zur möglichst genauen Bestimmung der Bahn aus mehr Beobachtungen als den nothwendigerweise erforderlichen schreiten können, muss schon eine angenäherte Bestimmung vorhanden sein, welche von allen gegebenen Beobachtungen nicht allzuviel abweicht. Die Verbesserungen, welche an diese angenäherten Elemente noch anzubringen sind, um einen möglichst genauen Anschluss zu erreichen, sollen als die gesuchten Grössen der Aufgabe angesehen werden. Da man annehmen kann, dass diese sich so klein ergeben werden, dass die Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen, so werden die Aenderungen, welche die berechneten geocentrischen Oerter des Himmelskörpers hierdurch erlangen, nach den im zweiten Abschnitt des ersten Buches gegebenen Differentialformeln berechnet werden können. Die gemäss den gesuchten, verbesserten Elementen berechneten

*) Abgesehen von besonderen Fällen, wo die Lösung in gewisser Beziehung unbestimmt bleibt.

Oerter werden daher durch lineare Funktionen der Verbesserungen der Elemente dargestellt, und die Vergleichung jener mit den beobachteten Oertern führt nach den oben auseinandergesetzten Principien zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe. Diese Operationen erfreuen sich einer so grossen Einfachheit, dass sie einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen, und es ist von selbst einleuchtend, dass beliebig viele und beliebig weit von einander entfernte Beobachtungen zur Benutzung herangezogen werden können. — Derselben Methode kann man sich auch zur Verbesserung der *parabolischen* Bahnen der Cometen bedienen, wenn zufällig eine längere Beobachtungsreihe vorhanden ist, und die möglichst beste Uebereinstimmung verlangt wird.

188.

Die vorstehende Methode ist vorzüglich den Fällen angepasst, wo die höchste Genauigkeit gewünscht wird, sehr häufig aber treten Fälle ein, wo man ohne Bedenken ein wenig von jener aufgeben darf, wenn man auf diese Weise die Weitschichtigkeit der Rechnung wesentlich einschränken kann, hauptsächlich wenn die Beobachtungen noch keinen grossen Zeitraum einschliessen, und deshalb an eine sozusagen definitive Bestimmung der Bahn noch nicht gedacht wird. In solchen Fällen kann die nachfolgende Methode mit bemerkenswerthem Vortheil in Benutzung genommen werden.

Es mögen aus der ganzen Menge der Beobachtungen zwei vollständige Oerter L und L′ ausgewählt, und für die entsprechenden Zeiten aus den angenäherten Elementen die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde berechnet werden. Darauf bilde man in Hinblick auf diese Entfernungen drei Hypothesen, indem man bei der ersten die berechneten Werthe beibehält, bei der zweiten Hypothese die erste Entfernung ändert und die zweite bei der dritten Hypothese; beide Aenderungen können nach Maassgabe der Unsicherheit, welche man bei jenen Entfernungen als übrigbleibend voraussetzt, nach Belieben angenommen werden. Gemäss diesen drei Hypothesen, welche wir in folgendem Schema darstellen,

	Hyp. I.	Hyp. II.	Hyp. III.
Dem ersten Orte entsprechende Entfernung*)	D	$D + \delta$	D
Dem zweiten Orte entsprechende Entfernung	D'	D'	$D' + \delta'$

*) Noch bequemer wird es sein, an Stelle der Entfernungen selbst die Logarithmen der curtirten Distanzen zu benutzen.

werden nach den im ersten Buch auseinandergesetzten Methoden aus den beiden Oertern L und L′ drei Elementensysteme berechnet und darauf aus allen diesen die geocentrischen Oerter des Himmelskörpers, welche den Zeiten aller übrigen Beobachtungen entsprechen. Diese seien (indem man die einzelnen Längen und Breiten oder Rectascensionen und Declinationen besonders aufschreibt)

im ersten System	M,	M',	M''	etc.
im zweiten System . . .	$M + \alpha$,	$M' + \alpha'$,	$M'' + \alpha''$	etc.
im dritten System . . .	$M + \beta$,	$M' + \beta'$,	$M'' + \beta''$	etc.
Ferner seien die beobachteten Oerter bezw. . .	N,	N',	N''	etc.

Insoweit nun kleinen Aenderungen der Entfernungen D, D′ proportionale Aenderungen der einzelnen Elemente und der aus ihnen berechneten geocentrischen Oerter entsprechen, wird man voraussetzen dürfen, dass die aus einem vierten Elementensystem berechneten geocentrischen Oerter, welches auf die Entfernungen von der Erde $D + x\delta$, $D' + y\delta'$ begründet ist, bezw. $M + \alpha x + \beta y$, $M' + \alpha' x + \beta' y$, $M'' + \alpha'' x + \beta'' y$ etc. sein werden. Hieraus werden darauf nach den vorhergehenden Untersuchungen die Grössen x und y so bestimmt, dass jene Grössen bezw. mit N, N′, N″ etc. möglichst gut übereinstimmen (indem man der relativen Genauigkeit der Beobachtungen Rechnung trägt). Das verbesserte Elementensystem selbst, wird entweder ebenso aus L, L′ und den Entfernungen $D + x\delta$, $D' + y\delta'$, oder nach bekannten Regeln aus den drei ersten Elementensystemen durch einfache Interpolation abgeleitet werden können.

189.

Diese Methode weicht von der vorhergehenden nur insofern ab, dass sie zwei geocentrische Oerter genau und darauf die übrigen so genau wie möglich darstellt, während nach der anderen Methode keine Beobachtung den übrigen vorgezogen wird, sondern die Fehler möglichst auf alle vertheilt werden. Die Methode des vorhergehenden Art. ist daher der früheren nur insofern hintanzusetzen, als man dadurch, dass die Oerter L, L′ einen gewissen Theil der Fehler aufnehmen, die Fehler in den übrigen Oertern erheblich verkleinern kann; meistens kann man sich jedoch durch eine zweckmässige Auswahl der Beobachtungen L, L′ leicht davor bewahren, dass dieser Unterschied von grosser Bedeutung werden

kann. Man muss sich nämlich Mühe geben, für L, L′ solche Beobachtungen auszuwählen, welche sich nicht nur einer ausgesuchten Genauigkeit erfreuen, sondern auch so beschaffen sind, dass die aus ihnen und den Entfernungen abgeleiteten Elemente durch kleine Variationen der geocentrischen Positionen selbst nicht allzusehr beeinflusst werden. Man würde daher thöricht handeln, wenn man um einen geringen Zeitraum von einander entfernte Beobachtungen auswählen würde, oder solche, denen sehr nahe gegenüberliegende oder zusammenfallende heliocentrische Oerter entsprechen.

III.

Aus der
Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas
aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807, 1808 und 1809.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1810, November 25.)

10.

. . . .

. . . .

. . . . Ich beabsichtige, die elliptischen Elemente zu ermitteln, welche nicht diesen oder jenen Oppositionen genau, sondern allen, welche bis jetzt beobachtet sind, möglichst nahe genügen. Die Methode, vermittelst deren man ein solches Geschäft erledigen kann, habe ich zwar schon in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper", Art. 187., kurz beschrieben, da aber nicht nur der Gegenstand, welchen ich dort allgemein behandelt habe, in dem speciellen Falle, wo die beobachteten Oerter Oppositionen sind, gewisse Abkürzungen gestattet, sondern auch gewisse praktische Kunstgriffe, durch welche ich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schon lange zu einer bequemeren zu machen gewohnt bin, in jenem Werke nicht gegeben werden, so hoffe ich, dass es den Astronomen nicht unlieb sein wird, wenn ich diese Rechnungen hier etwas weitläufiger wiedergebe. Da sich das ganze Geschäft um die Bestimmung von *Verbesserungen* dreht, die an angenäherte Elemente anzubringen sind, von welchen angenommen wird,

dass sie von allen beobachteten Oertern nicht sehr abweichen, so wird die ganze Arbeit in zwei Abschnitte zerfallen: erstens nämlich müssen die linearen Gleichungen gebildet werden, welche die einzelnen beobachteten Oerter liefern, sodann sind aus diesen Gleichungen die zweckmässigsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln.

11.

Nach den angenäherten Elementen sei

L die mittlere Länge des Planeten für eine beliebige Epoche,
t die Anzahl der verstrichenen Tage von der Epoche an bis zum Augenblick der Beobachtung,
7 die mittlere tägliche siderische Bewegung in Secunden,
Π die Länge des Perihels,
$e = \sin\varphi$ die Excentricität,
a die grosse Halbaxe,
r der Radius vector,
v die wahre Anomalie,
E die excentrische Anomalie,
☊ die Länge des aufsteigenden Knotens,
i die Neigung der Bahn,
u das Argument der Breite,
λ die heliocentrische Länge,
γ die heliocentrische Breite,
β die geocentrische Breite,
R die Entfernung der Erde von der Sonne.

Beobachtet soll aber sein

α die heliocentrische Länge,
ϐ die geocentrische Breite.

Endlich bezeichne ich mit dL, d7, $d\Pi$ etc. Verbesserungen der Grössen L, 7, Π etc. Es wird daher

$d\mathrm{L} + t\,d7$ die Verbesserung der mittleren Länge,
$d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi$ die Verbesserung der mittleren Anomalie,

und deshalb nach den Art. 15. und 16. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“

$$dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) + \frac{a^2}{r^2}(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a}da + a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v\,(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi\,.$$

Ferner wird die Verbesserung des Argumentes der Breite

$$du = dv + d\Pi - d\Omega\,,$$

und nach Art. 52. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ die Verbesserung der heliocentrischen Länge

$$d\lambda = d\Omega - \text{tang}\,\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di + \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\,du\,.$$

Hieraus entnimmt man

$$\begin{aligned} d\lambda = & \quad \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d\mathrm{L} \\ & + \frac{t\,a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d7 \\ & + \left(\frac{\cos i}{\cos^2\gamma} - \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\right)d\Pi \\ & + \frac{a^2\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi \\ & + \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\right)d\Omega \\ & - \text{tang}\,\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di\,. \end{aligned}$$

Da man ferner hat

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}}7 &= \text{Const.} \\ r\sin(\beta - \gamma) &= \mathrm{R}\sin\beta \\ \text{tang}\,\gamma &= \text{tang}\,i\sin(\alpha - \Omega)\,, \end{aligned}$$

so wird durch Differentiation

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\,\frac{d7}{7}$$

$$\frac{dr}{r} + \text{cotang}(\beta - \gamma)\cdot(d\beta - d\gamma) = \text{cotang}\,\beta\,d\beta\,, \quad \text{oder}$$

$$d\beta = \frac{\sin\beta\cos(\beta - \gamma)}{\sin\gamma}\,d\gamma - \frac{\sin\beta\sin(\beta - \gamma)}{r\sin\gamma}\,dr$$

$$d\gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2i}\,di - \frac{1}{2}\sin 2\gamma\,\text{cotang}(\alpha - \Omega)\,d\Omega\,,$$

woraus man mit Hinzuziehung des oben entwickelten Werthes von dr entnimmt

$$
\begin{aligned}
d\beta = & -\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} d\mathrm{L} \\
& + \left\{ \frac{2 \sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{3\, 7 \sin\gamma} - \frac{a\, t \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} \right\} d7 \\
& + \frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} d\Pi \\
& + \frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \cos\varphi \cos v}{r \sin\gamma} d\varphi \\
& + \frac{2 \sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma}{\sin 2i} di \\
& - \sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma \operatorname{cotang}(\alpha-\Omega)\, d\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Hiernach werden die Werthe der heliocentrischen Länge und der geocentrischen Breite aus den verbesserten Werthen der Elemente $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, und deshalb liefert jede Opposition zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \lambda + d\lambda \\
\delta &= \beta + d\beta\,.
\end{aligned}
$$

12.

Bei Anwendung dieser Vorschriften auf die im Art. 2. gegebenen sechs Oppositionen der Pallas erhalten wir, wenn wir die Rechnung auf das zweite der im Art. 3. skizzirten Elementensysteme begründen, die folgenden zwölf Gleichungen*):

*) Um die Nachrechnung der Zahlenangaben zu ermöglichen, setzen wir die oben angeführten, beobachteten sechs Oppositionen aus Art. 2. und die Elemente II. aus Art. 3. hierher.

Zeit der Opposition für den Meridian von Göttingen	Tage von Beginn d. Jahres 1803 an	Heliocentrische Länge	Geocentrische Breite
1803 Juni 30. $0^h\ 27^m\ 32^s$	181,019120	277° 39′ 24,0″	+46° 26′ 36,0″
1804 Aug. 30. 4 58 27	608,207257	337 0 36,1	+15 1 49,8
1805 Nov. 29. 11 15 4	1064,468796	67 20 42,9	−54 30 54,9
1807 Mai 4. 14 37 41	1585,609502	223 37 27,7	+42 11 25,6
1808 Juli 26. 21 17 32	2034,887176	304 2 59,7	+37 43 53,7
1809 Sept. 22. 16 10 20	2457,673843	359 40 4,4	− 7 22 10,1

II. *Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre* 1804, 1805, 1807 und 1808.

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen 221° 34′ 56,7″
Mittlere tägliche tropische Bewegung . . . . 770,4467″

Aus der *ersten* Opposition, wo gefunden ist
die berechnete Länge = 277° 36′ 20,07″
und die geocentrische Breite = + 46° 26′ 29,19″:

$$0 = -183{,}93'' + 0{,}79363\, dL + 143{,}66\, d7 + 0{,}39493\, d\Pi$$
$$+ 0{,}95920\, d\varphi - 0{,}18856\, d\Omega + 0{,}17387\, di$$
$$0 = - 6{,}81'' - 0{,}02658\, dL + 46{,}71\, d7 + 0{,}02658\, d\Pi$$
$$- 0{,}20858\, d\varphi + 0{,}15946\, d\Omega + 1{,}25782\, di.$$

Aus der *zweiten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 337° 0′ 36,04″
und die geocentrische Breite = + 15° 1′ 46,71″:

$$0 = - 0{,}06'' + 0{,}58880\, dL + 358{,}12\, d7 + 0{,}26208\, d\Pi$$
$$- 0{,}85234\, d\varphi + 0{,}14912\, d\Omega + 0{,}17775\, di$$
$$0 = - 3{,}09'' + 0{,}01318\, dL + 28{,}39\, d7 - 0{,}01318\, d\Pi$$
$$- 0{,}07861\, d\varphi + 0{,}91704\, d\Omega + 0{,}54365\, di.$$

Aus der *dritten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 67° 20′ 42,88″
und die geocentrische Breite = − 54° 31′ 3,88″:

$$0 = - 0{,}02'' + 1{,}73436\, dL + 1846{,}17\, d7 - 0{,}54603\, d\Pi$$
$$- 2{,}05662\, d\varphi - 0{,}18833\, d\Omega - 0{,}17445\, di$$
$$0 = - 8{,}98'' - 0{,}12606\, dL - 227{,}42\, d7 + 0{,}12606\, d\Pi$$
$$- 0{,}38939\, d\varphi + 0{,}17176\, d\Omega - 1{,}35441\, di.$$

Aus der *vierten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 223° 37′ 25,39″
und die geocentrische Breite = + 42° 11′ 28,07″:

$$0 = - 2{,}31'' + 0{,}99584\, dL + 1579{,}03\, d7 + 0{,}06456\, d\Pi$$
$$+ 1{,}99545\, d\varphi - 0{,}06040\, d\Omega - 0{,}33750\, di$$
$$0 = + 2{,}47'' - 0{,}08089\, dL - 67{,}22\, d7 + 0{,}08089\, d\Pi$$
$$- 0{,}09970\, d\varphi - 0{,}46359\, d\Omega + 1{,}22803\, di.$$

Aus der *fünften* Opposition, wo
die berechnete Länge = 304° 2′ 59,71″
und die geocentrische Breite = + 37° 44′ 31,82″:

Länge des Perihels 1803	121°	5′	22,1″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172	28	46,8
Neigung der Bahn	34	37	31,5
Excentricität (= sin [14° 10′ 4,08″])			0,2447624
Logarithmus der grossen Halbaxe			0,4422276.

D. H.

$$0 = + \quad 0{,}01'' + 0{,}65311\, dL + 1329{,}09\, d7 + 0{,}38994\, d\Pi$$
$$- 0{,}08439\, d\varphi - 0{,}04305\, d\Omega + 0{,}34268\, di$$
$$0 = + \quad 38{,}12'' - 0{,}00218\, dL + \quad 38{,}47\, d7 + 0{,}00218\, d\Pi$$
$$- 0{,}18710\, d\varphi + 0{,}47301\, d\Omega - 1{,}14371\, di.$$

Aus der *sechsten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 359° 34′ 46,67″
und die geocentrische Breite = — 7° 20′ 12,13″:

$$0 = - 317{,}73'' + 0{,}69957\, dL + 1719{,}32\, d7 + 0{,}12913\, d\Pi$$
$$- 1{,}38787\, d\varphi + 0{,}17130\, d\Omega - 0{,}08360\, di$$
$$0 = + 117{,}97'' - 0{,}01315\, dL - \quad 43{,}84\, d7 + 0{,}01315\, d\Pi$$
$$+ 0{,}02929\, d\varphi + 1{,}02138\, d\Omega - 0{,}27187\, di.$$

Von diesen zwölf Gleichungen verwerfen wir aber die zehnte vollständig, da die beobachtete geocentrische Breite allzu unsicher ist.

13.

Da man die sechs Unbekannten dL, $d7$ etc. nicht so zu bestimmen vermag, dass allen elf Gleichungen genau Genüge geschieht, d. h. dass die einzelnen Funktionen der Unbekannten, welche rechts stehen, gleichzeitig = 0 werden, so wollen wir diejenigen Werthe ermitteln, durch welche die Quadrate dieser Funktionen die allerkleinste Summe ergeben. Man sieht nämlich leicht ein, wenn allgemein die folgenden linearen Funktionen der Unbekannten p, q, r, s, etc. vorgelegt sind:

$$n + ap + bq + cr + ds + \text{etc.} = w$$
$$n' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} = w'$$
$$n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} = w''$$
$$n''' + a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \text{etc.} = w'''$$

etc., dass die Bedingungsgleichungen dafür, dass

$$w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2 + \text{etc.} = \Omega$$

ein Minimum wird, die folgenden sind:

$$aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$dw + d'w' + d''w'' + d'''w''' + \text{etc.} = 0$$

etc. oder, wenn wir der Kürze wegen

$$an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \text{etc. mit } [an]$$
$$a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \text{etc. mit } [aa]$$
$$ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \text{etc. mit } [ab]$$
etc.
$$b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \text{etc. mit } [bb]$$
$$bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \text{etc. mit } [bc]$$
etc. etc.

bezeichnen, dass p, q, r, s etc. durch Elimination aus nachstehenden Gleichungen bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned}
[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} &= 0\\
[bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} &= 0\\
[cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc.} &= 0\\
[dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$
etc.

Wenn jedoch die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. etwas grösser ist, so verursacht die Elimination eine sehr ausgedehnte und unangenehme Arbeit, welche wir auf nachfolgende Weise wesentlich abkürzen können. Ausser den Coefficienten $[an]$, $[aa]$, $[ab]$ etc. (deren Anzahl $= \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\mu)$ wird, wenn die Anzahl der Unbekannten $= \mu$ ist) nehme ich auch

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 + \text{etc.} = [nn]$$

als berechnet an, worauf leicht zu ersehen ist, dass

$$\begin{aligned}
\Omega = [nn] &+ 2[an]\,p + 2[bn]\,q + 2[cn]\,r + 2[dn]\,s + \text{etc.}\\
&+ [aa]\,p^2 + 2[ab]\,pq + 2[ac]\,pr + 2[ad]\,ps + \text{etc.}\\
&+ [bb]\,q^2 + 2[bc]\,qr + 2[bd]\,qs + \text{etc.}\\
&+ [cc]\,r^2 + 2[cd]\,rs + \text{etc.}\\
&+ [dd]\,s^2 + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

wird. Bezeichnen wir daher

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc. mit } A,$$

so sind offenbar diejenigen Glieder von $\frac{A^2}{[aa]}$, bei welchen der Faktor p auftritt, einzeln in Ω enthalten, und deshalb muss $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ eine von p unabhängige Funktion sein. Setzen wir also

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = [nn, 1]$$

$$[bn] - \frac{[an]\,[ab]}{[aa]} = [bn, 1]$$

$$[cn] - \frac{[an]\,[ac]}{[aa]} = [cn, 1]$$

$$[dn] - \frac{[an]\,[ad]}{[aa]} = [dn, 1] \text{ etc.}$$

$$[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} = [bb, 1]$$

$$[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} = [bc, 1]$$

$$[bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]} = [bd, 1] \text{ etc. etc., so ist}$$

$$\begin{aligned}\Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [nn, 1] &+ 2[bn, 1]\,q + 2[cn, 1]\,r + 2[dn, 1]\,s + \text{etc.}\\ &+ [bb, 1]\,q^2 + 2[bc, 1]\,qr + 2[bd, 1]\,qs + \text{etc.}\\ &+ [cc, 1]\,r^2 + 2[cd, 1]\,rs + \text{etc.}\\ &+ [dd, 1]\,s^2 + \text{etc.}\\ &\text{etc.,}\end{aligned}$$

welche Funktion wir mit Ω' bezeichnen wollen.

Wenn wir analog

$$[bn, 1] + [bb, 1]\,q + [bc, 1]\,r + [bd, 1]\,s + \text{etc.} = B$$

setzen, so wird $\Omega' - \frac{B^2}{[bb, 1]}$ eine von q unabhängige Funktion sein, welche wir $= \Omega''$ annehmen. Auf dieselbe Weise machen wir

$$[nn, 1] - \frac{[bn, 1]^2}{[bb, 1]} = [nn, 2]$$

$$[cn, 1] - \frac{[bn, 1]\,[bc, 1]}{[bb, 1]} = [cn, 2] \text{ etc.}$$

$$[cc, 1] - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} = [cc, 2]$$

etc. etc. und

$$[cn, 2] + [cc, 2]\,r + [cd, 2]\,s + \text{etc.} = C\,,$$

wonach $\Omega'' - \frac{C^2}{[cc, 2]}$ eine auch von r unabhängige Funktion sein wird. In derselben Weise fahren wir fort, bis wir in der Reihe

Ω, Ω', Ω'' etc. zu einem von allen Unbekannten unabhängigen Glied gelangen, welches $[nn, \mu]$ sein wird, wenn wir die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. mit μ bezeichnen. Wir erhalten also

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb, 1]} + \frac{C^2}{[cc, 2]} + \frac{D^2}{[dd, 3]} + \text{etc.} + [nn, \mu] .$$

Da nun $\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 +$ etc. seiner Natur nach einen negativen Werth nicht annehmen kann, so lässt sich leicht zeigen, dass die Divisoren $[aa]$, $[bb, 1]$, $[cc, 2]$, $[dd, 3]$ etc. nothwendig *positiv* herauskommen müssen (der Kürze wegen will ich jedoch diese Auseinandersetzung hier nicht weitläufiger verfolgen). Hieraus folgt aber von selbst, dass sich der kleinste Werth von Ω ergiebt, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. wird. Aus diesen μ Gleichungen müssen wir daher die Unbekannten p, q, r, s etc. bestimmen, was wir in umgekehrter Reihenfolge sehr leicht ausführen können, da offenbar die letzte Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält, die vorletzte zwei und so weiter. Diese Methode empfiehlt sich zugleich aus dem Grunde, weil dabei der kleinste Werth der Summe Ω von selbst bekannt wird, da er ja offenbar $= [nn, \mu]$ ist.

14.

Diese Vorschriften wollen wir jetzt auf unser Beispiel anwenden, wo p, q, r, s etc. bezw. dL, $d7$, $d\Pi$, $d\varphi$, $d\Omega$, di sind. Nach sorgfältig durchgeführter Rechnung fand ich die folgenden numerischen Werthe:

$[nn] = +148848$	$[bc] = -49{,}06$	Hieraus leitete ich
$[an] = -371{,}09$	$[bd] = -3229{,}77$	ferner ab
$[bn] = -580104$	$[be] = -198{,}64$	$[nn, 1] = +125569$
$[cn] = -113{,}45$	$[bf] = -143{,}05$	$[bn, 1] = -138534$
$[dn] = +268{,}53$	$[cc] = +0{,}71917$	$[cn, 1] = -119{,}31$
$[en] = +94{,}26$	$[cd] = +1{,}13382$	$[dn, 1] = -125{,}18$
$[fn] = -31{,}81$	$[ce] = +0{,}06400$	$[en, 1] = +72{,}52$
$[aa] = +5{,}91569$	$[cf] = +0{,}26341$	$[fn, 1] = -43{,}22$
$[ab] = +7203{,}91$	$[dd] = +12{,}00340$	$[bb, 1] = +2458225$
$[ac] = -0{,}09344$	$[de] = -0{,}37137$	$[bc, 1] = +62{,}13$
$[ad] = -2{,}28516$	$[df] = -0{,}11762$	$[bd, 1] = -510{,}58$
$[ae] = -0{,}34664$	$[ee] = +2{,}28215$	$[be, 1] = +213{,}84$
$[af] = -0{,}18194$	$[ef] = -0{,}36136$	$[bf, 1] = +73{,}45$
$[bb] = +10834225$	$[ff] = +5{,}62456$	$[cc, 1] = +0{,}71769$

$[cd, 1] = +1{,}09773$
$[ce, 1] = -0{,}05852$
$[cf, 1] = +0{,}26054$
$[dd, 1] = +11{,}12064$
$[de, 1] = -0{,}50528$
$[df, 1] = -0{,}18790$
$[ee, 1] = +2{,}26185$
$[ef, 1] = -0{,}37202$
$[ff, 1] = +5{,}61905$

Und hieraus auf ähnliche Weise

$[nn, 2] = +117763$
$[cn, 2] = -115{,}81$
$[dn, 2] = -153{,}95$
$[en, 2] = +84{,}57$
$[fn, 2] = -39{,}08$
$[cc, 2] = +0{,}71612$

$[cd, 2] = +1{,}11063$
$[ce, 2] = -0{,}06392$
$[cf, 2] = +0{,}25868$
$[dd, 2] = +11{,}01463$
$[de, 2] = -0{,}46088$
$[df, 2] = -0{,}17265$
$[ee, 2] = +2{,}24325$
$[ef, 2] = -0{,}37841$
$[ff, 2] = +5{,}61686$

Hieraus ferner

$[nn, 3] = +99034$
$[dn, 3] = +25{,}66$
$[en, 3] = +74{,}23$
$[fn, 3] = +2{,}75$
$[dd, 3] = +9{,}29213$
$[de, 3] = -0{,}36175$
$[df, 3] = -0{,}57384$

$[ee, 3] = +2{,}23754$
$[ef, 3] = -0{,}35532$
$[ff, 3] = +5{,}52342$

Hieraus ebenso

$[nn, 4] = +98963$
$[en, 4] = +75{,}23$
$[fn, 4] = +4{,}33$
$[ee, 4] = +2{,}22346$
$[ef, 4] = -0{,}37766$
$[ff, 4] = +5{,}48798$

Hieraus

$[nn, 5] = +96418$
$[fn, 5] = +17{,}11$
$[ff, 5] = +5{,}42383$

Und hieraus endlich

$[nn, 6] = +96364$.

Wir haben daher zur Bestimmung der Unbekannten die sechs folgenden Gleichungen:

$$0 = +\ 17{,}11'' + 5{,}42383\, di$$
$$0 = +\ 75{,}23'' + 2{,}22346\, d\Omega - 0{,}37766\, di$$
$$0 = +\ 25{,}66'' + 9{,}29213\, d\varphi - 0{,}36175\, d\Omega - 0{,}57384\, di$$
$$0 = -\ 115{,}81'' + 0{,}71612\, d\Pi + 1{,}11063\, d\varphi - 0{,}06392\, d\Omega + 0{,}25868\, di$$
$$0 = -138534'' + 2458225\, d7 + 62{,}13\, d\Pi - 510{,}58\, d\varphi + 213{,}84\, d\Omega + 73{,}45\, di$$
$$0 = -\ 371{,}09'' + 5{,}91569\, dL + 7203{,}91\, d7 - 0{,}09344\, d\Pi - 2{,}28516\, d\varphi - 0{,}34664\, d\Omega - 0{,}18194\, di,$$

woraus wir ableiten

$$di = -\ 3{,}15''$$
$$d\Omega = -\ 34{,}37''$$
$$d\varphi = -\ 4{,}29''$$
$$d\Pi = +166{,}44''$$
$$d7 = +\ 0{,}054335''$$
$$dL = -\ 3{,}06''.$$

Die verbesserten elliptischen Elemente, welche allen sechs Oppositionen möglichst nahe genügen, sind also folgende:

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen	221° 34′ 53,64″
Mittlere tägliche tropische Bewegung	770,5010″
Länge des Perihels 1803	121° 8′ 8,54″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 12,43
Neigung der Bahn	34 37 28,35
Excentricität (= sin [14° 9′ 59,79″])	0,2447424
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422071.

15.

Setzen wir die soeben gefundenen Werthe der Verbesserungen dL, $d7$ etc. in die zwölf Gleichungen des Art. 12. ein, so erhalten wir die nachfolgenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der heliocentrischen Längen und der geocentrischen Breiten:

Bei d. Opposition des Jahres	Differenz in Länge	Differenz in Breite
1803	−111,00″	− 8,31″
1804	+ 59,18	−36,67
1805	+ 19,92	+ 0,07
1807	+ 85,77	+ 25,01
1808	+135,88	+ 28,72
1809	−216,54	+ 83,01

IV.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.

(*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, herausgegeben von *B. von Lindenau* und *J. G. F. Bohnenberger*. Band I, S. 185. Heft für März und April 1816.)

1.

Bei der Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers Δ durch die Formel

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2}$$

ausgedrückt wird, wo π den halben Kreisumfang, e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, auch h eine Constante bedeutet, die man nach Art. 178. der *Theoria Motus Corporum Coelestium* als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen ansehen kann. Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe derjenigen Grössen, von welchen die Beobachtungen abhängen, braucht man den Werth der Grösse h gar nicht zu kennen; auch das *Verhältniss* der Genauigkeit der Resultate zu der Genauigkeit der Beobachtungen ist von h unabhängig. Inzwischen ist immer eine Kenntniss dieser Grösse selbst interessant und lehrreich, und ich will daher zeigen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntniss gelangen mag.

2.

Ich lasse zuerst einige den Gegenstand erläuternde Bemerkungen vorausgehen. Der Kürze wegen bezeichne ich den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-t^2}\,dt}{\sqrt{\pi}},$$

von $t = 0$ an gerechnet, durch $\Theta(t)$. Einige einzelne Werthe werden von dem Gange dieser Funktion eine Vorstellung geben. Man hat

$$\begin{aligned}
0{,}5000000 &= \Theta(0{,}4769363) = \Theta(\varrho) \\
0{,}6000000 &= \Theta(0{,}5951161) = \Theta(1{,}247790\,\varrho) \\
0{,}7000000 &= \Theta(0{,}7328691) = \Theta(1{,}536618\,\varrho) \\
0{,}8000000 &= \Theta(0{,}9061939) = \Theta(1{,}900032\,\varrho) \\
0{,}8427008 &= \Theta(1) \qquad\qquad\;\, = \Theta(2{,}096716\,\varrho) \\
0{,}9000000 &= \Theta(1{,}1630872) = \Theta(2{,}438664\,\varrho) \\
0{,}9900000 &= \Theta(1{,}8213864) = \Theta(3{,}818930\,\varrho) \\
0{,}9990000 &= \Theta(2{,}3276754) = \Theta(4{,}880475\,\varrho) \\
0{,}9999000 &= \Theta(2{,}7510654) = \Theta(5{,}768204\,\varrho) \\
1 &= \Theta(\infty)
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liege, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht grösser als Δ sei, ist

$$= \int \frac{h e^{-h^2x^2}\,dx}{\sqrt{\pi}},$$

wenn man das Integral von $x = -\Delta$ bis $x = +\Delta$ ausdehnt, oder doppelt so gross, wie dasselbe Integral von $x = 0$ bis $x = \Delta$ genommen, mithin

$$= \Theta(h\Delta).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler nicht unter $\frac{\varrho}{h}$ sei, ist also $= \frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich: wir wollen diese Grösse $\frac{\varrho}{h}$ den *wahrscheinlichen Fehler* nennen und mit r bezeichnen. Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $2{,}438664\,r$ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$; die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $3{,}818930\,r$ steige, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

3.

Wir wollen nun annehmen, dass bei m wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler α, β, γ, δ etc. begangen sind, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werth von h und r

schliessen lasse. Macht man zwei Voraussetzungen, indem man den wahren Werth von h entweder $= H$ oder $= H'$ setzt, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen sich in denselben die Fehler α, β, γ, δ etc. erwarten liessen, bezw. wie

$$He^{-H^2\alpha^2} \times He^{-H^2\beta^2} \times He^{-H^2\gamma^2} \times \text{etc.}$$

$$\text{zu } H'e^{-H'^2\alpha^2} \times H'e^{-H'^2\beta^2} \times H'e^{-H'^2\gamma^2} \times \text{etc.},$$

d. i. wie

$$H^m e^{-H^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})} \quad \text{zu} \quad H'^m e^{-H'^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}.$$

In demselben Verhältnisse stehen folglich die Wahrscheinlichkeiten, dass H oder H' der wahre Werth von h war, *nach* dem Erfolge jener Fehler (*T. M. C. C.* Art. 176.): oder die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h ist der Grösse

$$h^m e^{-h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}$$

proportional. Der *wahrscheinlichste* Werth von h ist folglich derjenige, für welchen diese Grösse ein Maximum wird, welchen man nach bekannten Regeln

$$= \sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}}$$

findet. Der wahrscheinlichste Werth von r wird folglich

$$= \varrho\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}{m}}$$

$$= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.}}{m}}.$$

Dies Resultat ist allgemein, m mag gross oder klein sein.

4.

Man begreift leicht, dass man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner m ist. Entwickeln wir daher den Grad von Genauigkeit, welchen man dieser Bestimmung beizulegeu hat, für den Fall, wo m eine grosse Zahl ist. Wir bezeichnen den gefundenen wahrscheinlichen Werth von h

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})}}$$

Kürze halber mit H, und bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit, H sei der wahre Werth von h, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth $= \mathrm{H} + \lambda$ sei, sich verhält, wie

$$\mathrm{H}^m e^{-\frac{m}{2}} : (\mathrm{H} + \lambda)^m e^{-\frac{m(\mathrm{H}+\lambda)^2}{2\mathrm{H}^2}}$$

oder wie

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\mathrm{H}} + \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\mathrm{H}^2} - \frac{1}{5}\frac{\lambda^3}{\mathrm{H}^3} + \text{etc.}\right)}.$$

Das zweite Glied wird gegen das erste nur dann noch merklich sein, wenn $\frac{\lambda}{\mathrm{H}}$ ein kleiner Bruch ist, daher wir uns erlauben dürfen, anstatt des angegebenen Verhältnisses dieses zu gebrauchen

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}}.$$

Dies heisst nun eigentlich so viel: die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $\mathrm{H} + \lambda$ und $\mathrm{H} + \lambda + d\lambda$ liege, ist sehr nahe

$$= \mathrm{K} e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}} d\lambda,$$

wo K eine Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass das Integral

$$\int \mathrm{K} e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}} d\lambda$$

zwischen den zulässigen Grenzen von λ genommen, $= 1$ werde. Statt solcher Grenzen ist es hier, wo wegen der Grösse von m offenbar

$$e^{-\frac{\lambda^2 m}{\mathrm{H}^2}}$$

unmerklich wird, sobald $\frac{\lambda}{\mathrm{H}}$ aufhört ein kleiner Bruch zu sein, erlaubt, die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen, wodurch

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{H}}\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

wird. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $\mathrm{H} - \lambda$ und $\mathrm{H} + \lambda$ liege,

$$= \Theta\left(\frac{\lambda}{\mathrm{H}}\sqrt{m}\right),$$

also jene Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{\lambda}{\mathrm{H}}\sqrt{m} = \varrho \quad \text{ist.}$$

Es ist also eins gegen eins zu wetten, dass der wahre Werth von h

$$\text{zwischen} \quad \mathrm{H}\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

liegt, oder dass der wahre Werth von r

$$\text{zwischen} \quad \frac{\mathrm{R}}{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{R}}{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}}$$

falle, wenn wir durch R den im vorhergehenden Art. gefundenen wahrscheinlichsten Werth von r bezeichnen. Man kann diese Grenzen die *wahrscheinlichen Grenzen der wahren Werthe von h und r* nennen; offenbar dürfen wir für die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von r hier auch setzen

$$\mathrm{R}\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{R}\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right).$$

5.

Wir sind bei der vorhergehenden Untersuchung von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass wir α, β, γ, δ etc. als bestimmte und gegebene Grössen betrachteten, und die Grösse der Wahrscheinlichkeit suchten, dass der wahre Werth von h oder r zwischen gewissen Grenzen liege. Man kann die Sache auch von einer andern Seite betrachten, und unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsfehler irgend einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetze unterworfen sind, die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit welcher erwartet werden kann, dass die Summe der Quadrate von m Beobachtungsfehlern zwischen gewisse Grenzen falle. Diese Aufgabe, unter der Bedingung, dass m eine grosse Zahl sei, ist bereits von *Laplace* aufgelöset, ebenso wie diejenige, wo die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dass die Summe von m Beobachtungsfehlern selbst zwischen gewisse Grenzen falle. Man kann leicht diese Untersuchung noch mehr generalisiren; ich begnüge mich, hier das Resultat anzuzeigen.

Es bezeichne $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x, so dass $\int\varphi(x)\,dx = 1$ wird, wenn man das Integral von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausdehnt. Zwischen denselben Grenzen wollen wir allgemein den Werth des Integrals

$$\int\varphi(x)\,x^n\,dx$$

durch $K^{(n)}$ bezeichnen. Es sei ferner $S^{(n)}$ die Summe

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{etc.},$$

wo α, β, γ, δ etc. unbestimmt m Beobachtungsfehler bedeuten; die Theile jener Summe sollen, auch für ein ungerades n, alle positiv genommen werden.

Sodann ist $mK^{(n)}$ der wahrscheinlichste Werth von $S^{(n)}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von $S^{(n)}$ zwischen die Grenzen $mK^{(n)} - \lambda$ und $mK^{(n)} + \lambda$ falle,

$$= \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)2})}}\right).$$

Folglich sind die wahrscheinlichen Grenzen von $S^{(n)}$

$$mK^{(n)} - \varrho\sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)2})}$$

und

$$mK^{(n)} + \varrho\sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)2})}.$$

Dieses Resultat gilt allgemein für jedes Gesetz der Beobachtungsfehler. Wenden wir es auf den Fall an, wo

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

gesetzt wird, so finden wir

$$K^{(n)} = \frac{\Pi\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}},$$

die Charakteristik Π in der Bedeutung der *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (Comm. nov. soc. Gotting. T. II.) genommen (M. 5. Art. 28. der angef. Abh.). Also

$$K = 1,\quad K' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},\quad K'' = \frac{1}{2h^2},\quad K''' = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$K^{IV} = \frac{1.3}{4h^4},\quad K^{V} = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}},\quad K^{VI} = \frac{1.3.5}{5h^6},\quad K^{VII} = \frac{1.2.3}{h^7\sqrt{\pi}}\ \text{etc.}$$

Es ist folglich der wahrscheinlichste Werth von $S^{(n)}$

$$\frac{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}},$$

und die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von $S^{(n)}$

$$\frac{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1-\varrho\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$\frac{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1+\varrho\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}.$$

Setzt man also, wie oben,

$$\frac{\varrho}{h}=r,$$

so dass r den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vorstellt, so ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}}$$

offenbar $= r$; und die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes jener Grösse

$$r\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$r\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}.$$

Es ist also auch eins gegen eins zu wetten, dass r zwischen den Grenzen

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\Pi(n-\tfrac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\,\tfrac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)}\right\}$$

liege. Für $n = 2$ sind diese Grenzen

$$\varrho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\} \text{ und } \varrho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\},$$

ganz mit den oben (Art. 4.) gefundenen übereinstimmend. Allgemein hat man für ein gerades n die Grenzen

$$\varrho\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m.1.3.5.7\ldots(n-1)}}$$
$$\times\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m.1.3.5.7\ldots(n-1)}}$$
$$\times\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right)}\right\}$$

und für ein ungerades n folgende

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\right)}\right\}$$

und

$$\varrho\sqrt[n]{\frac{S^{(n)}\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\varrho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\right)}\right\}.$$

6.

Ich füge noch die numerischen Werthe für die einfachsten Fälle bei:

Wahrscheinliche Grenzen von r

$$\text{I.}\quad 0{,}8453473\ \frac{S'}{m}\left(1\mp\frac{0{,}5095841}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{II.}\quad 0{,}6744897\sqrt[2]{\frac{S''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}4769363}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{III.}\quad 0{,}5771897\sqrt[3]{\frac{S'''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}4971987}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{IV.}\quad 0{,}5125017\sqrt[4]{\frac{S''''}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}5507186}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{V.}\quad 0{,}4655532\sqrt[5]{\frac{S^{V}}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}6355080}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{VI.}\quad 0{,}4294972\sqrt[6]{\frac{S^{VI}}{m}}\left(1\mp\frac{0{,}7557764}{\sqrt{m}}\right).$$

Man sieht also auch hieraus, dass die Bestimmungsart II von allen die vortheilhafteste ist. Hundert Beobachtungsfehler, nach dieser Formel behandelt, geben nämlich ein eben so zuverlässiges Resultat, wie

114 nach I, 109 nach III, 133 nach IV, 178 nach V, 251 nach VI.

Inzwischen hat die Formel I den Vorzug der allerbequemsten Rechnung, und man mag sich daher derselben, da sie doch nicht viel weniger genau ist als II, immerhin bedienen, wenn man nicht die Summe der Quadrate der Fehler sonst schon kennt, oder zu kennen wünscht.

7.

Noch bequemer, obwohl beträchtlich weniger genau, ist folgendes Verfahren: Man ordne die sämmtlichen m Beobachtungsfehler (absolut genommen) nach ihrer Grösse, und nenne den mittelsten, wenn ihre Zahl ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der zwei mittelsten bei gerader Anzahl, M. Es lässt sich zeigen, was aber an diesem Orte nicht weiter ausgeführt werden kann, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen r der wahrscheinlichste Werth von M ist, und dass die wahrscheinlichen Grenzen von M

$$r\left(1 - e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \text{ und } r\left(1 + e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right)$$

sind, oder die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes von r

$$\mathrm{M}\left(1 - e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \text{ und } \mathrm{M}\left(1 + e^{\varrho^2}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

oder in Zahlen

$$\mathrm{M}\left(1 \mp \frac{0{,}7520974}{\sqrt{m}}\right)$$

Dies Verfahren ist also nur wenig genauer, als die Anwendung der Formel VI, und man müsste 249 Beobachtungsfehler zu Rathe ziehen, um eben so weit zu reichen, wie mit 100 Beobachtungsfehlern nach Formel II.

8.

Die Anwendung einiger von diesen Methoden auf die in *Bode*'s astronomischem Jahrbuche für 1818, S. 234, vorkommenden Fehler bei

48 Beobachtungen der geraden Aufsteigungen des Polarsterns von *Bessel* gab

$$S' = 60{,}46''; \quad S'' = 110{,}600''; \quad S''' = 250{,}341118''.$$

Hieraus folgten die wahrscheinlichsten Werthe von r

nach Formel I . . .	1,065″,	wahrscheinl. Unsicherheit	= ±0,078″
„ II . . .	1,024	„	= ±0,070
„ III . . .	1,001	„	= ±0,072
nach Art. 7 . . .	1,045	„	= ±0,113,

eine Uebereinstimmung, wie sie kaum zu erwarten war. *Bessel* giebt selbst 1,067″, und scheint daher der Formel I gemäss gerechnet zu haben.

V.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie.

(Auszug aus einem Schreiben an *H. C. Schumacher*. *Astronomische Nachrichten*, Bd. I, S. 81. 1822.)

Ihrem Wunsche zufolge schicke ich Ihnen die Vorschriften zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe der praktischen Geometrie: die Lage eines Punktes aus den an demselben gemessenen horizontalen Winkeln zwischen andern Punkten von genau bekannter Lage zu finden. Der Gegenstand ist zwar ganz elementarisch, und jeder, der den Geist der Methode der kleinsten Quadrate kennt, kann sich die Vorschriften leicht selbst entwickeln: inzwischen wird jene Aufgabe als eine der nützlichsten in der praktischen Geometrie auch wohl oft von solchen Personen benutzt werden können, die nicht ganz in jenem Falle sind, und denen daher die Mittheilung der Formeln nicht unlieb ist.

Die Coordinaten eines der bekannten Punkte seien a, b, jene von Norden nach Süden, diese von Osten nach Westen positiv gezählt — ob die Abscissenlinie wahrer Meridian ist oder nicht, ist hier gleichgültig; ebenso x, y genäherte Coordinaten des zu bestimmenden Punktes, und dx, dy deren noch unbekannte Verbesserungen. Man bestimme φ und r nach den Formeln

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b-y}{a-x}, \quad r = \frac{a-x}{\cos\varphi} = \frac{b-y}{\sin\varphi},$$

indem man φ in demjenigen Quadranten wählt, der r positiv macht, und setze noch

$$\alpha = \frac{206265''(b-y)}{r^2}, \quad \beta = -\frac{206265''(a-x)}{r^2}.$$

Dann ist das Azimuth des ersten Punktes vom zweiten aus gesehen (die Richtung der Abscissenlinie als 0 betrachtet)

$$= \varphi + \alpha dx + \beta dy,$$

wo die beiden letzten Theile in Secunden ausgedrückt sind.

In Beziehung auf einen zweiten Punkt von bekannter Lage sollen φ', α', β', in Beziehung auf einen dritten φ'', α'', β'' u. s. w. dasselbe bedeuten, was φ, α, β in Beziehung auf den ersten sind.

Sind die Winkelmessungen an dem zu bestimmenden Orte auf einmal mit einem Theodolithen ohne Repetition gemacht, indem bei unverrücktem Instrument das Fernrohr nach der Reihe auf die verschiedenen bekannten Punkte geführt ist, so sollten, wenn h, h', h'' etc. die dabei abgelesenen Winkel bedeuten, die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\varphi - h + \alpha\, dx + \beta\, dy \\
&\varphi' - h' + \alpha' dx + \beta' dy \\
&\varphi'' - h'' + \alpha'' dx + \beta'' dy \text{ etc.}
\end{aligned}$$

durch die Substitution der wahren Werthe von dx und dy alle einerlei Werth bekommen, wenn die Beobachtungen absolut genau wären, und wenn man also drei derselben unter sich gleich setzte, würde man durch Elimination die Werthe von dx und dy erhalten. Sind überhaupt nur drei bekannte Punkte beobachtet, so lässt sich auch nichts weiter thun; ist aber ihre Anzahl grösser, so werden die Fehler der Winkelmessungen am vollkommensten ausgeglichen, indem man alle obigen Ausdrücke addirt, die Summe mit der Anzahl dividirt, die Differenz zwischen diesem Quotienten und jedem einzelnen Ausdruck $= 0$ setzt, und diese Gleichungen nach der bekannten Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate behandelt.

Sind hingegen die Winkelmessungen unabhängig von einander gemacht, so giebt jede derselben sofort eine Gleichung zwischen den unbekannten Grössen dx und dy, und alle diese Gleichungen sind dann nach der Methode der kleinsten Quadrate zu combiniren, wobei man, wenn man will, auch noch auf die etwa ungleiche Zuverlässigkeit der Winkel Rücksicht nehmen kann. Wäre also z. B. der Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte $= i$, zwischen dem zweiten und dritten $= i'$ etc. gefunden, immer von der Linken zur Rechten gerechnet, so hätte man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha)\, dx + (\beta' - \beta)\, dy &= 0 \\
\varphi'' - \varphi' - i' + (\alpha'' - \alpha')\, dx + (\beta'' - \beta')\, dy &= 0
\end{aligned}$$

etc. Haben diese Winkelmessungen gleiche Zuverlässigkeit, so

bildet man aus diesen Gleichungen zwei Normalgleichungen, die erste, indem man jene der Ordnung nach mit den respectiven Coefficienten von dx, d. i. die erste mit $\alpha' - \alpha$, die zweite mit $\alpha'' - \alpha'$ etc. multiplicirt und alles addirt; die andere, indem man dasselbe durch Multiplication mit den Coefficienten von dy ausführt und gleichfalls addirt. Ist hingegen die Winkelmessung von ungleicher Genauigkeit, und z. B. die erste auf μ, die andere auf μ' etc. Repetitionen gegründet, so müssen die Gleichungen beidemale vor der Addition auch erst noch mit diesen Zahlen μ, μ' etc. bezw. multiplicirt werden. Aus den so gefundenen beiden Normalgleichungen werden dann dx und dy durch Elimination gefunden. (Diese Vorschriften sind nur um derer willen beigefügt, denen die Methode der kleinsten Quadrate noch unbekannt ist, und für die vielleicht auch die Erinnerung noch nöthig sein könnte, dass bei jenen Multiplicationen die algebraischen Zeichen von $\alpha' - \alpha$ etc. sorgfältig beachtet werden müssen.) Endlich bemerke ich noch, dass hierbei *nur* die Fehler der Winkelmessungen ausgeglichen werden sollen, indem die Coordinaten der bekannten Punkte als *genau* angesehen werden.

Ich erläutere diese Vorschriften für den zweiten Fall noch an den mir von Ihnen mitgetheilten Winkelmessungen auf der Holkensbastion bei Copenhagen, obwohl, wie es scheint, die zuletzt angezeigte Voraussetzung dabei nicht genau genug statt findet; bei so kleinen Entfernungen haben kleine Unrichtigkeiten von einigen Zehntheilen eines Fusses in den gegebenen Coordinaten einen sehr viel grösseren Einfluss, als die Fehler in den Winkelmessungen, und man darf sich daher nicht wundern, dass nach möglichster Ausgleichung der Winkel Differenzen zurückbleiben, die viel grösser sind, als bei den Beobachtungen der Winkel als möglich angenommen werden kann. Für den gegenwärtigen Zweck, wo nur ein Rechnungsbeispiel gegeben werden soll, kann dies jedoch gleichgültig sein.

Winkel auf Holkensbastion.

Friedrichsberg—Petri	73°	35′	22,8″
Petri—Erlösersthurm	104	57	33,0
Erlöserstburm—Friedrichsberg .	181	27	5,0
Friedrichsberg—Frauenthurm .	80	37	10,8
Frauenthurm—Friedrichsthurm .	101	11	50,8
Friedrichsthurm—Friedrichsberg	178	11	1,5 .

Coordinaten, von der Copenhagener Sternwarte gerechnet, in Pariser Fuss.

Petri	+ 487,7	+ 1007,7
Frauenthurm	+ 710,0	+ 684,2
Friedrichsberg . . .	+ 2430,6	+ 8335,0
Erlöserstburm . . .	+ 2940,0	— 3536,0
Friedrichsthurm . .	+ 3059,3	— 2231,2 .

Als genäherte Coordinaten des Beobachtungsplatzes wurden angenommen:

$$x = + 2836{,}44 \quad y = + 444{,}33 .$$

Und damit fanden sich die Azimuthe:

Petri	166°	30′	42,56″	$+ 19{,}92\,dx + 83{,}04\,dy$
Frauenthurm . . .	173	33	50,54	$+ 10{,}80\,dx + 95{,}78\,dy$
Friedrichsberg . .	92	56	39,46	$+ 26{,}07\,dx + 1{,}34\,dy$
Erlöserstburm . .	271	29	25,38	$- 51{,}79\,dx - 1{,}35\,dy$
Friedrichsthurm .	274	45	41,48	$- 76{,}56\,dx - 6{,}38\,dy$.

Der berechnete Winkel Friedrichsberg—Petri ist daher

$$73^\circ\ 34'\ 3{,}10'' - 6{,}15\,dx + 81{,}70\,dy ,$$

welches mit dem beobachteten verglichen die Gleichung

$$- 79{,}70'' - 6{,}15\,dx + 81{,}70\,dy = 0$$

giebt. Ebenso erhält man die fünf anderen Gleichungen

$$\begin{aligned} + 69{,}82'' - 71{,}71\,dx - 84{,}39\,dy &= 0 \\ + 9{,}08 + 77{,}86\,dx + 2{,}69\,dy &= 0 \\ + 0{,}28 - 15{,}27\,dx + 94{,}44\,dy &= 0 \\ + 0{,}04 - 87{,}36\,dx - 102{,}16\,dy &= 0 \\ - 3{,}42 + 102{,}63\,dx + 7{,}72\,dy &= 0 . \end{aligned}$$

Aus der Verbindung dieser sechs Gleichungen erhält man, indem man den Beobachtungen gleiche Zuverlässigkeit beilegt, die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} + 29640\,dx + 14033\,dy &= + 4168'' \\ + 14033\,dx + 33219\,dy &= + 12383'' , \end{aligned}$$

und hieraus die Werthe

$$dx = - 0{,}05 , \quad dy = + 0{,}40 ,$$

oder die verbesserten Coordinaten der Holkensbastion

$$+ 2836{,}39 \text{ und } + 444{,}73 .$$

Die nach Substitution dieser Werthe von dx und dy zwischen den berechneten und beobachteten Winkeln zurückbleibenden Unterschiede sind noch viel zu gross, um den Messungen zugeschrieben werden zu können, und beweisen, was oben bemerkt ist, dass die Coordinaten der bekannten Punkte nicht auf Zehntheile des Fusses zuverlässig waren, weshalb denn freilich auch die gefundene Verbesserung selbst diesmal etwas zweifelhaft bleibt.

Die bei dieser Rechnung zu Grunde gelegten genäherten Coordinaten der Holkensbastion waren durch die *direkte* Methode aus dem vierten und fünften der obigen Winkel berechnet. Obgleich diese direkte Methode als ein ziemlich erschöpfter Gegenstand zu betrachten ist, so setze ich sie doch der Vollständigkeit wegen hier auch noch her, in derjenigen Gestalt, in welcher ich sie anzuwenden pflege.

Es seien a, b die Coordinaten des ersten bekannten Punktes (man wählt denselben aus den drei bekannten nach Gefallen); die des zweiten seien in die Form

$$a + \mathrm{R}\cos\mathrm{E}, \quad b + \mathrm{R}\sin\mathrm{E}$$

gebracht, und die des dritten in dieselbe

$$a + \mathrm{R}'\cos\mathrm{E}', \quad b + \mathrm{R}'\sin\mathrm{E}'.$$

Die gesuchten Coordinaten des Beobachtungspunktes bezeichne man durch

$$a + \varrho\cos\varepsilon, \quad b + \varrho\sin\varepsilon.$$

Ferner sei der hier beobachtete Winkel zwischen dem ersten und zweiten Punkte = M, der zwischen dem ersten und dritten = M′; ich setze voraus, dass diese Winkel von der Linken zur Rechten genommen, und dass sie, falls sie so über 180° betragen haben, erst um 180° vermindert sind, oder was dasselbe ist, dass wenn ein Winkel in der verkehrten Ordnung unter 180° betrug, statt seiner das Complement zu 180° genommen ist*). Ich mache ferner

$$\frac{\mathrm{R}}{\sin\mathrm{M}} = n, \quad \frac{\mathrm{R}'}{\sin\mathrm{M}'} = n'$$

$$\mathrm{E} - \mathrm{M} = \mathrm{N}, \quad \mathrm{E}' - \mathrm{M}' = \mathrm{N}'$$

(wo nöthigenfalls vorher 360° addirt wird).

---

*) Die Absicht davon ist, die folgenden Grössen n, n' immer positiv zu machen, und dadurch weniger Aufmerksamkeit auf die algebraischen Zeichen nöthig zu haben.

Dies vorausgesetzt, hat man die beiden Gleichungen

$$\varrho = n \sin(\varepsilon - \mathrm{N}), \quad \varrho = n' \sin(\varepsilon - \mathrm{N}'),$$

welche, wenn sie so geschrieben werden:

$$n = \frac{1}{\varrho} \sin(\varepsilon - \mathrm{N}), \quad n' = \frac{1}{\varrho} \sin(\varepsilon - \mathrm{N}'),$$

unter die Aufgabe Theor. Mot. C. C. p. 82. gehören. Die eine der dort gegebenen Auflösungen führt zu folgender Regel:

Ich nehme an, dass n' grösser, wenigstens nicht kleiner als n ist, welches erlaubt ist, da es willkürlich ist, welchen Punkt man als den zweiten oder dritten betrachten will. Es sei

$$\frac{n}{n'} = \operatorname{tang} \zeta$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\mathrm{N}' - \mathrm{N})}{\operatorname{tang}(45^\circ - \zeta)} = \operatorname{tang} \psi .$$

Sodann wird

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\mathrm{N} + \mathrm{N}') + \psi,$$

und nachdem ε gefunden ist, wird ϱ durch eine der obigen Formeln, oder besser durch beide berechnet.

In unserem Beispiele haben wir, den Frauenthurm als den ersten, Friedrichsberg vorläufig als den zweiten und den Friedrichsthurm als den dritten Punkt betrachtet,

$$a = +710{,}0 \quad b = +684{,}2$$

$$\mathrm{E} = 77^\circ\ 19'\ 31{,}92'' \qquad \mathrm{E}' = 308^\circ\ 51'\ 45{,}77''$$
$$\log \mathrm{R} = 3{,}8944205 \qquad \log \mathrm{R}' = 3{,}5733549$$
$$\mathrm{M} = 99^\circ\ 22'\ 50{,}20'' \qquad \mathrm{M}' = 101^\circ\ 11'\ 50{,}80''$$

(zufolge obiger Anm.)

$$\mathrm{N} = 337^\circ\ 56'\ 42{,}72'' \qquad \mathrm{N}' = 207^\circ\ 39'\ 54{,}97''$$
$$\log n = 3{,}9002650 \qquad \log n' = 3{,}5817019.$$

Da hier $n > n'$, so vertauschen wir die Ordnung und setzen

$$\mathrm{N} = 207^\circ\ 39'\ 54{,}97'' \qquad \mathrm{N}' = 337^\circ\ 56'\ 42{,}72''$$
$$\log n = 3{,}5817019 \qquad \log n' = 3{,}9002650.$$

Hiernächst findet sich ferner

$$\zeta = 19^\circ\ 39'\ 3{,}87'', \quad \psi = 80^\circ\ 45'\ 31{,}69'', \quad \varepsilon = 353^\circ\ 33'\ 50{,}53''$$

und $\log \varrho = 3{,}3303990$, und die Coordinaten der Holkensbastion $+2836{,}441$ und $+444{,}330$.

VI.

Chronometrische Längenbestimmungen.

(Auszug aus einem Schreiben an *H. C. Schumacher*. *Astronomische Nachrichten*, Bd. V, S. 227. 1826.)

Es seien Θ, Θ', Θ'' etc. die Zeiten (zusammen an der Zahl n), wo der Chronometer vor den Zeiten der Oerter, deren Längen x, x', x'' etc. sind, um die Unterschiede a, a', a'' etc. voraus war. Die Angaben Θ, Θ', Θ'' etc. setze ich schon auf einen Ort reducirt voraus. Ist also der tägliche Gang des Chronometers $= u$, so würde man, wenn der Chronometer vollkommen wäre, die $n-1$ Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} a - \Theta u - x &= a' - \Theta' u - x' = a'' - \Theta'' u - x'' \\ &= a''' - \Theta''' u - x''' = \text{etc.} \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen zureichen, um die unbekannten Grössen u, x, x', x'' etc. zu bestimmen, wird theils eine der Grössen x, x', x'' etc. als gegeben angesehen, theils vorausgesetzt, dass wenigstens an einem Orte zweimal beobachtet ist, also zwei der Grössen x, x', x'' etc. identisch sind. Falls nun nicht mehr als zwei identisch sind, wird die Aufgabe ganz bestimmt sein. Im entgegengesetzten Fall ist sie überbestimmt; und man wird dann die unbekannten Grössen so bestimmen müssen, dass den $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a - a' + (\Theta' - \Theta) u - x + x' \\ 0 &= a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u - x' + x'' \\ 0 &= a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'') u - x'' + x''' \text{ etc.} \end{aligned}$$

so genau wie möglich Genüge geleistet werde, da die immer stattfindenden Unvollkommenheiten aller Chronometer nicht verstatten werden, allen genau Genüge zu leisten. Offenbar aber darf diesen

Gleichungen nicht gleiches Gewicht beigelegt werden; denn in der That drücken die Grössen

$$a - a' + (\Theta' - \Theta)\, u - x + x'$$
$$a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')\, u - x' + x'' \text{ etc.}$$

bloss die Aggregate aller Abweichungen vom mittleren Gange aus, die der Chronometer in den Zwischenzeiten $\Theta' - \Theta$, $\Theta'' - \Theta'$ etc. gehabt hat, und wenn von einem guten Chronometer die Rede ist, dem man wirklich einen mittleren, keinen allmählich in einerlei Sinn zunehmenden Aenderungen unterworfenen Gang beilegen kann, so wird der mittlere zu befürchtende Werth eines solchen Aggregats der Quadratwurzel der Zwischenzeit proportional gesetzt werden müssen.

Demzufolge wird man also den obigen Gleichungen, indem man sie den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate gemäss behandelt, ungleiche Gewichte, die den Zwischenzeiten $\Theta' - \Theta$, $\Theta'' - \Theta'$, $\Theta''' - \Theta''$ etc. umgekehrt proportional sind, beilegen müssen.

Die Auflösung hat dann keine Schwierigkeit, und man erhält sowohl die plausibelsten Werthe von u, x, x', x'' etc. als ihre relative Zuverlässigkeit. Hierbei mache ich noch ein paar Bemerkungen.

1) Wenn die erste und letzte Beobachtung an einerlei Orte gemacht sind, so ist der plausibelste Werth von u genau derselbe, der bloss aus der Vergleichung der beiden äussersten Beobachtungen folgt. Die Rechnung wird dann ausserordentlich einfach, da es nach einem leicht zu beweisenden Lehrsatz erlaubt ist, diesen plausibelsten Werth von u sogleich in den Gleichungen zu substituiren, oder, was dasselbe ist, die sämmtlichen beobachteten Chronometerzeiten auf die eines fingirten zu reduciren, dessen Voreilung $= 0$ wäre.

2) Hat man den Gleichungen schlechtweg die Gewichte

$$\frac{1}{\Theta' - \Theta},\ \frac{1}{\Theta'' - \Theta'} \text{ etc.}$$

beigelegt, so liegt den Gewichten, welche man für die Endresultate der Längenbestimmungen findet, als Einheit die Genauigkeit zu Grunde, die man mit diesem Chronometer zu erwarten hätte, wenn man, bei bekanntem Gange, einen Längenunterschied nach einem Zeitintervall von einem Tage bestimmte (insofern die Zeiten

Θ, Θ', Θ'' etc. in Tagen ausgedrückt sind). Allein damit man die Resultate verschiedener Chronometer von ungleicher Güte vergleichen kann, muss noch ein Faktor hinzukommen, der von der Güte jedes einzelnen Chronometers abhängig ist. Diesen zu finden, setze man die Werthe der Grössen

$$a - a' + (\Theta' - \Theta)u - x + x'$$
$$a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')u - x' + x''$$
$$a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'')u - x'' + x''' \text{ etc.},$$

indem man für u, x, x', x'' etc. die gefundenen plausibelsten Werthe substituirt,

$$= \lambda, \lambda', \lambda'' \text{ etc. und } \frac{\lambda^2}{\Theta' - \Theta} + \frac{\lambda'^2}{\Theta'' - \Theta'} + \frac{\lambda''^2}{\Theta''' - \Theta''} + \text{etc.} = \mathrm{S}.$$

Es sei ferner ν die Anzahl der sämmtlichen unbekannt gewesenen Grössen, und $m = \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{n - \nu - 1}}$, dann ist jener specifische Faktor für jeden einzelnen Chronometer der Grösse $\frac{1}{m^2}$ oder $\frac{n - \nu - 1}{\mathrm{S}}$ proportional. Man kann m als die mittlere zu befürchtende Abweichung vom mittleren Gange nach einem Tage Zwischenzeit ansehen.

3) Die obigen Vorschriften gelten für einen Chronometer, der keine erhebliche progressive Abänderung seines Ganges zeigt. Wo das Gegentheil eintritt, kann man, insofern die Reihe der Beobachtungen nicht übermässig lang ist, sich damit begnügen, eine der Zeit proportionirte Abänderung des täglichen Ganges anzunehmen, so dass noch eine unbekannte Grösse mehr einzuführen ist, und die Gleichungen diese Gestalt haben:

$$0 = a - a' + (\Theta' - \Theta)u + (\Theta'^2 - \Theta^2)v - x + x'$$
$$0 = a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')u + (\Theta''^2 - \Theta'^2)v - x' + x''$$
$$0 = a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'')u + (\Theta'''^2 - \Theta''^2)v - x'' + x'''$$
etc.

3) Dieses noch weiter zu treiben, und also noch eine unbekannte Grösse mehr und Glieder der Form $(\Theta'^3 - \Theta^3)w$ einzuführen, möchte kaum rathsam sein. Chronometer, die starke entschiedene Abänderungen des mittleren Ganges zeigen, die aber selbst wieder unregelmässig sind, würde ich, neben anderen, lieber ganz ausschliessen, da ihre Resultate theils viel weniger genau werden, theils die Genauigkeit sich viel schwerer in Zahlen zur

Vergleichung angeben lässt. Ich halte mich daher hier bei der viel verwickelteren Theorie solcher Fälle nicht auf, da in dem vorliegenden Fall das obige zureichend sein wird.

4) Was die Auflösung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate betrifft, so ist vielleicht nicht überflüssig in Erinnerung zu bringen, dass man in den meisten Fällen wohl thut, die unbekannten Grössen aus einem bekannten (möglichst genäherten) und einem unbekannten (also sehr kleinen) Theile zusammenzusetzen. Dieser Rath ist zwar theils sonst schon wiederholt gegeben, theils ist der Vortheil dieser Manier von selbst einleuchtend, allein es schien gut, ihn wieder in Erinnerung zu bringen, da ich sehe, dass er so häufig vergessen wird, wodurch die numerischen Rechnungen unnöthigerweise erschwert, und Fehler leichter möglich werden.

Von den 36 Chronometern habe ich folgende 5 berechnet.

	Nr. 1.	Nr. 4.	*Breguet* 3056.	*Kessels* 1252.	*Barraud* 904.
Greenwich, Juni 30. $3^h\ 22^m$	$-\ 8^m\ 17{,}14^s$	$+\ 1^m\ 2{,}37^s$			
Juli 25. 2 15	10 44,39	1 32,15	$+30^m\ 59{,}75^s$	$+50^m\ 29{,}31^s$	$+48^m\ 29{,}20^s$
„ 28. 3 13	11 0,69	1 36,96	30 50,07	50 39,69	48 40,24
Aug. 2. 1 15	11 28,48	1 44,44	30 31,78	50 52,14	48 58,87
„ 17. 10 28	12 59,40	2 6,24	29 35,69	51 38,66	49 57,83
„ 25. 7 27	13 47,98	2 15,84	29 10,48	52 2,45	50 27,15
Sept. 10. 7 40	15 24,47	2 40,36			
Helgoland, Juli 3. 3 40	−40 8,00	−30 26,84			
„ 22. 12 40	42 2,02	30 3,89	− 0 20,34	+18 48,39	+16 47,39
Aug. 5. 1 48	43 18,11	29 43,35	1 10,24	19 26,77	17 37,51
„ 11. 13 9	43 35,77	29 33,43	1 32,75	19 47,22	18 1,30
„ 30. 19 30	45 53,08	29 7,96	2 40,67	20 47,68	19 17,03
Sept. 6. 3 6	46 31,56	28 58,94	3 4,55	21 6,56	19 43,80
„ 7. 8 42	46 38,72	28 56,71			
Altona, Aug. 6. 5 55	−51 38,95	−37 55,76	− 9 28,50	+11 16,25	+ 9 28,48
„ 9. 12 35	51 57,35	37 50,03	9 38,81	11 27,76	9 40,30
„ 31. 9 57	54 10,33	37 21,30	10 56,68	12 35,96	11 5,92
Sept. 4. 22 12	54 39,16	37 15,21	11 15,36	12 48,10	11 24,49
Bremen, Aug. 13. 0 2	−47 50,65	−33 16,49	− 5 23,37	+16 5,83	+14 21,86

Ich setze die Rechnung für *Breguet* 3056 zur Probe her. Die Länge von Helgoland sei = 0, die von Greenwich = $-x$, die von Altona = $+y$; Bremen schliesse ich hier aus, da es ohnehin, weil nur einmal daselbst beobachtet ist, keine Controlle darbietet.

Die Zeiten rechne ich von der ersten Vergleichung der englischen Chronometer an (Greenwich, Jun. 30. $3^h\ 22^m$).

Ich finde so, indem ich einen fingirten Chronometer vom Gange = 0 substituire, dessen Stand:

Θ		
22,4	+ 60,20^s	
25,0	+1949,60	$-x$
28,0	+1950,87	$-x$
32,9	+1950,29	$-x$
35,9	+ 59,08	
37,1	— 434,98	$+y$
40,4	— 433,49	$+y$
42,4	+ 59,88	
48,3	+1949,60	$-x$
56,2	+1952,74	$-x$
61,6	+ 61,32	
62,2	— 432,53	$+y$
66,8	— 434,98	$+y$
68,0	+ 60,19.	

Die obigen Gleichungen fallen nun hier so aus, dass x und y gar nicht gemischt sind, wodurch die weitere Rechnung noch bequemer wird. Wir haben nämlich für x vier Bestimmungen:

$$+1889{,}40^s;\ \text{Gewicht}\ \frac{1}{2{,}6} = 0{,}38$$

$$+1891{,}21\quad "\quad \frac{1}{3{,}0} = 0{,}33$$

$$+1889{,}72\quad "\quad \frac{1}{5{,}9} = 0{,}17$$

$$+1891{,}42\quad "\quad \frac{1}{5{,}4} = 0{,}19$$

Also $x = +1890{,}36^s$; Gewicht $= 1{,}07$.

Ebenso findet man

$$y = +494{,}12^s;\quad \text{Gewicht} = 3{,}83.$$

Substituirt man diese Werthe, so ist der Stand des fingirten Chronometers gegen Helgolander Zeit:

Θ		λ
22,4	+ 60,20^s	
		— 0,96^s
25,0	59,24	
		+ 1,27
28,0	60,51	
		— 0,58
32,9	59,93	

Θ		λ
32,9	+ 59,93^s	
		— 0,85^s
35,9	59,08	
		+ 0,06
37,1	59,14	
		+ 1,49
40,4	60,63	
		— 0,75
42,4	59,88	
		— 0,64
48,3	59,24	
		+ 3,14
56,2	62,38	
		— 1,06
61,6	61,32	
		+ 0,27
62,2	61,59	
		— 2,45
66,8	59,14	
		+ 1,05
68,0	60,19	

Also S = 6,02, $m = \sqrt{\frac{6,02}{13-3}}$. Hieraus der mittlere zu befürchtende Fehler bei $x \ldots 0,75^s$, bei $y \ldots 0,40^s$.

Die sämmtlichen von mir berechneten 5 Chronometer geben:

		E. med.	Gewicht.
Breguet	x = 1890,36^s	0,75^s	1,78
Kessels	1893,29	0,67	2,23
Barraud	1892,32	0,49	4,16
Engl. 1	1892,39	0,43	5,41
„ 4	1892,52	0,35	8,16
Mittel	x = 1892,35		21,74
Breguet	y = 494,12	0,40	6,25
Kessels	493,89	0,36	7,72
Barraud	493,67	0,26	14,79
Engl. 1	493,98	0,29	11,89
„ 4	494,16	0,24	17,36
Mittel	y = 493,96		58,01

Uebrigens ist zwar hier in die letzte Columne unter der Ueberschrift Gewicht $\frac{1}{\text{Quadr.(E.m.)}}$ gesetzt, also als Einheit die Genauigkeit verstanden, wo der mittlere zu befürchtende Fehler = 1^s ist, so dass also z. B. für Altona der mittlere zu befürchtende Fehler $= \frac{1^s}{\sqrt{58,01}} = 0,13^s$ wird; inzwischen wird es rathsamer sein, die Zahlen der letzten Columne bloss als Verhältnisszahlen zu betrachten, und die absolute Genauigkeit aus den Unterschieden der aus

den einzelnen Chronometern für x und y gefundenen Werthe von den Endresultaten abzuleiten. Inzwischen wird so die Genauigkeit des Endresultats noch immer etwas grösser scheinen, als sie wirklich ist, da die Zeitbestimmungen in Greenwich, Helgoland und Altona keine absolute Genauigkeit haben, und also offenbar, wenn die Anzahl der Chronometer auch noch so gross wäre, doch immer die aus jener Quelle entsprungenen Fehler in den Endresultaten nachwirken müssen.

Die Längenbestimmung von Bremen kann auf folgende Art gemacht werden. Setzt man die Länge $= z$ östlich von Helgoland, so giebt die Vergleichung des *Breguet*'schen Chronometers den Stand des fingirten Chronometers

$$-165{,}52^s + z.$$

Also

aus der vorherg. Vergl.	$z = 225{,}40^s$;	Gewicht $\frac{1}{1{,}4} = 0{,}7$
„ „ folgenden „	$z = 224{,}76$	„ $\frac{1}{4{,}5} = 0{,}2$
	225,24	0,9.

Das Gewicht 0,9 ist noch mit $\frac{10}{6{,}02}$ zu multipliciren.

So geben die 5 Chronometer

		Gewicht.
Breguet	225,24^s	1,5
Kessels	225,84	1,9
Barraud	225,39	3,6
Engl. 1	226,04	2,9
„ 4	224,86	4,3
	225,42	14,2.

Allein die Länge von Bremen, die hiernach gegen Altona 268,54^s westlich ausfällt, bleibt natürlich immer von der Zeitbestimmung in Bremen abhängig, und dieser Unterschied scheint mehrere Secunden zu klein zu sein. Nach meinen Dreiecken ist der Ansgariusthurm 273,51^s in Zeit westlich von Göttingen, also *Olbers*' Observatorium 271,9^s.

VII.

Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona

durch Beobachtungen am Ramsden'schen Zenithsector.

(1828).

Einleitung.

Durch die von mir in den Jahren 1821 bis 1824 durch das Königreich Hannover längs des Meridians von Göttingen geführte Dreieckskette sind die Sternwarten von Göttingen und Altona auf das genaueste trigonometrisch mit einander verbunden. Diese Messungen werden in Zukunft ausführlich bekannt gemacht werden: hier wird nur bemerkt, dass die absoluten Grössen auf der von Herrn Prof. *Schumacher* in Holstein mit äusserster Schärfe gemessenen Basis beruhen, mit welcher das Dreieckssystem durch die Seite Hamburg—Hohenhorn zusammenhängt; die Orientirung gründet sich auf die Beobachtungen am Göttinger Mittagsfernrohr, da die Sternwarte und das nördliche Meridianzeichen selbst Dreieckspunkte sind. Die Sternwarten von Göttingen und Altona liegen durch ein merkwürdiges Spiel des Zufalls auf weniger als eine Hausbreite in einerlei Meridian. Obgleich die absoluten Polhöhen durch die Beobachtungen mit festen Meridianinstrumenten bestimmt sind, so war es doch wichtig, den Unterschied der Breiten noch auf eine andere Art mit einerlei Instrument zu bestimmen, und ich war so glücklich, dazu den trefflichen *Ramsden*'schen Zenithsector anwenden zu können, der bekanntlich zu ähnlichem Zweck bei der englischen Gradmessung gedient hat. Die damit im Frühjahr 1827 von mir angestellten Beobachtungen und ihre Resultate sind der Hauptgegenstand dieser Schrift.

Da die Beobachtungen mit diesem Instrument, wenn viele Sterne in einer Reihe zu beobachten sind, nicht wohl ohne den

Beistand eines geübten Gehülfen gemacht werden können, so hatte Herr Prof. *Schumacher* die Güte, den Herrn Ingenieur-Lieutenant *v. Nehus*, unter Genehmigung Sr. Majestät des Königs von Dänemark, für die Beobachtungen an beiden Plätzen damit zu beauftragen. Dieser sehr geschickte Beobachter hat fortwährend die Ablesung der Mikrometerschraube und die Einstellung des Lothfadens besorgt, während ich selbst die Antritte an die Meridianfäden beobachtete, und den auf den Meridian senkrechten Faden auf die Sterne einstellte: nur in den beiden ersten Beobachtungsnächten in Altona war jenes Geschäft von einem andern Gehülfen besorgt; allein diese Beobachtungen sind deshalb nicht mit aufgenommen, zumal da die Erfahrung bestätigte, dass verschiedene Personen die Bisection der Punkte durch den Lothfaden ungleich schätzten.

Das Instrument ist durch die ausführliche von *Mudge* gegebene Beschreibung hinlänglich bekannt. In Göttingen konnte es in der Sternwarte selbst, unter dem östlichen Meridianspalt, aufgestellt werden. In Altona war dies nicht thunlich; es wurde daher in dem Garten des Herrn Prof. *Schumacher*, in welchem die dortige Sternwarte selbst liegt, unter demselben Beobachtungszelte, welches *Mudge* in England gebraucht hat, aufgestellt. Die Solidität der Aufstellung, auf eingerammten Pfählen, liess nichts zu wünschen übrig: das Nivellement der Verticalaxe wurde täglich nachgesehen, und gewöhnlich fast nichts zu ändern gefunden; dasselbe gilt von der Horizontalaxe.

Um die Ebene des Limbus in den Meridian zu bringen, wurde in Göttingen das südliche Meridianzeichen benutzt, welches zwar in dem Meridian des westlichen Spaltes steht, dessen Azimuth am Platze des Sectors sich aber mit grösster Schärfe berechnen liess. In Altona konnte ein ähnliches Mittel nicht angewandt werden; der Limbus wurde zuerst, mit Hülfe der Kenntniss der absoluten Zeit, vermittelst eines culminirenden Sterns sehr nahe in den Meridian gebracht; die Beobachtung mehrerer Sterne in der ganzen Ausdehnung des Limbus gab dann leicht die noch nöthige kleine Correction der Aufstellung. Da, wie schon erwähnt ist, von den am Sector culminirenden Sternen in jeder Nacht auch die Antritte an die Meridianfäden beobachtet wurden, und die Rectascensionen der Sterne bekannt waren, so erhielt die richtige Aufstellung im Meridian dadurch eine fortwährende sichere Controlle, und nur einmal war eine unbedeutende Nachhülfe erforderlich. In der

Regel wurde von einer Nacht zur andern mit der Stellung des Limbus, östlich oder westlich, abgewechselt, und nur gegen den Schluss der Beobachtungen wurde, um die Anzahl der Beobachtungen auf beide Lagen ziemlich gleich zu vertheilen, von dieser Regel zuweilen abgewichen, und der Sector in einer Nacht ein- oder mehreremale umgewandt.

Der Stand des Barometers und des inneren und äusseren Thermometers wurde in jeder Nacht wenigstens dreimal, zu Anfang, in der Mitte und am Schluss der Beobachtungen aufgezeichnet. Ebenso, nach dem Vorgang von *Mudge,* der Unterschied der Temperatur oben und unten am Sector, da deshalb der Limbus und der Radius in ungleichem Verhältnisse verändert werden. Dass übrigens jede andere durch die Einrichtung des Instruments vorgeschriebene Vorsicht sorgfältig beachtet ist, z. B. das Wassergefäss, in welches das Loth hängt, gehörig angefüllt zu erhalten, von der Mikrometerschraube, so viel thunlich, dieselben Gewinde spielen zu lassen u. dgl., ist wohl überflüssig, besonders zu bemerken. Die Einstellung des Lothfadens auf den oberen Punkt (das Centrum des Gradbogens) wurde bei der Beobachtung jedes Sternes von neuem unabhängig von der vorhergegangenen gemacht, und die Einstellung auf den nächsten Theilungspunkt (oder die beiden nächsten) wurde in der Regel mehreremale wiederholt, und aus den verschiedenen Ablesungen der Mikrometerschraube, die meistens auf wenige Decimaltheile der Secunde übereinstimmten, das Mittel genommen.

1. Die beobachteten Sterne.

Ich hatte zu Anfang 38 Sterne in schicklichen Lagen zur Beobachtung ausgewählt, denen ich gegen den Schluss der Beobachtungen in Göttingen noch fünf andere beifügte, weil ich besorgte, dass durch ungünstiges Wetter der Schluss der Beobachtungen in Altona so weit verzögert werden könnte, dass ein beträchtlicher Theil der ersten Sterne wegen der bei Tage eintretenden Culmination nicht oft genug würde beobachtet werden können. Diese Besorgniss bestätigte sich jedoch nur in geringem Grade, und nur ein einziger Stern ist in Altona bloss einseitig beobachtet. Ich gebe hier die mittlere Stellung dieser Sterne auf den Anfang des Jahres 1827 reducirt: die Declinationen sind die Resultate, welche die Beobachtungen am Zenithsector selbst ergeben haben; die Rectascensionen, bei welchen für den gegen-

wärtigen Zweck die allerschärfste Bestimmung unwesentlich ist, gründen sich meistens nur auf eine einmalige Beobachtung am Meridiankreise, deren Reduktion Herr *von Heiligenstein* gefälligst berechnet hat. Der Bequemlichkeit wegen bezeichne ich die Sterne mit fortlaufenden Zahlen. No. 8, 13, 15 und 31 sind Doppelsterne; bei dem ersten ist immer der nachfolgende Stern, bei den beiden folgenden die Mitte eingestellt; bei No. 31 ist der Nebenstern so klein, dass er im Fernrohr des Sectors, selbst bei versuchsweise verdunkeltem Felde immer unsichtbar blieb, obgleich er von Herrn Prof. *Schumacher* im lichtstärkeren Fernrohr des *Reichenbach*'schen Meridiankreises sofort bemerkt wurde, ohne dass uns damals bekannt war, dass schon andere Astronomen diesen Doppelstern als solchen erkannt hatten.

	Bezeichnung.	G. Aufst. 1827.			Declin. 1827.		
1	24 Canum	13ʰ	27ᵐ	22,39ˢ	49°	54′	11,62″
2	83 Ursae		34	9,77	55	33	34,98
3	η Ursae		40	42,86	50	10	46,20
4	86 Ursae		47	28,48	54	34	55,55
5	—		50	45,55	55	25	59,22
6	P. 13. 289		55	19,44	46	35	39,14
7	13 Bootis	14	1	49,03	50	16	43,44
8	κ Bootis seq.		7	16,93	52	36	7,47
9	P. 14. 56		12	5,39	56	13	36,51
10	Θ Bootis		19	18,40	52	39	12,05
11	P. 14. 131		27	50,42	53	39	33,02
12	P. 14. 164		35	24,18	52	58	55,66
13	39 Bootis med.		43	48,37	49	26	9,46
14	P. 14. 235		50	38,71	50	20	22,49
15	44 Bootis med.		58	5,30	48	19	52,47
16	—	15	7	8,12	49	13	46,68
17	P. 15. 39		10	33,95	51	34	53,72
18	—		15	0,55	52	35	5,87
19	—		21	50,88	54	37	34,87
20	—		30	42,13	54	29	54,30
21	—		38	9,07	52	54	37,09
22	—		42	14,32	46	16	4,70
23	—		48	16,24	56	20	27,00

	Bezeichnung.	G. Aufst. 1827.			Declin. 1827.		
24	—	15ʰ	54ᵐ	10,23ˢ	50°	22′	39,41″
25	Θ Draconis		58	39,70	59	1	47,14
26	—	16	4	24,06	50	38	13,12
27	P. 16. 33		7	24,92	46	20	17,04
28	P. 16. 56		11	34,31	53	40	13,41
29	—		16	2,19	52	27	11,06
30	—		20	38,75	55	36	4,73
31	—		26	34,90	45	58	5,85
32	16 Draconis		32	6,42	53	15	3,64
33	—		37	53,85	50	16	13,67
34	—		42	1,51	57	5	37,79
35	—		45	2,26	46	56	48,53
36	P. 16. 253		49	21,51	46	49	22,01
37	P. 16. 291		56	11,73	56	56	42,35
38	P. 16. 310	17	0	15,10	49	2	47,09
39	P. 17. 20		4	23,12	58	29	49,33
40	P. 17. 38		8	1,46	56	52	21,74
41	74 Herculis		15	28,30	46	24	52,90
42	P. 17. 120		20	53,56	57	10	13,11
43	β Draconis		26	31,90	52	25	57,91

II. Die Beobachtungen.

Ein vollständiger Abdruck des Tagebuches in seiner ursprünglichen Gestalt, welcher die Stärke dieser Schrift mehr als verdoppelt haben würde, hat mir überflüssig geschienen: ich gebe daher die Beobachtungen sogleich nach den Sternen geordnet.

Die erste Columne enthält die Zenithdistanzen, wie das Instrument sie gegeben hat, d. i. die blosse Reduktion der Ablesung. Nördliche Zenithdistanzen sind als positiv, südliche als negativ betrachtet.

Die zweite Columne giebt die Vereinigung der Refraction mit der Wirkung der ungleichen Ausdehnung des Instruments wegen Ungleichheit der oberen und unteren Temperatur: die äussersten vorgekommenen Unterschiede waren + 1,2° Réaum. (das obere Thermometer höher), und — 0,6°. Um ein reines Resultat zur Beurtheilung der Uebereinstimmung der Beobachtungen unter sich

zu erhalten, habe ich die Mühe nicht gescheut, den Betrag für jede einzelne Beobachtung zu berechnen, wobei jedoch einige kleine sich leicht darbietende Rechnungsvortheile benutzt sind.

Die dritte Columne enthält die Reduktion auf den mittleren Ort für den Anfang des Jahres wegen Aberration, Nutation und Praecession, wozu bei einigen Sternen noch die eigene Bewegung gesetzt ist; es ist nämlich die jährliche eigene Bewegung in Declination angenommen

für 10 . . . — 0,42″
„ 25 . . . + 0,33
„ 37 . . . + 0,38.

Bei den beiden ersten Sternen ist die eigene Bewegung längst entschieden; bei 37 zeigt sie sich durch Vergleichung mit *Piazzi*'s Bestimmung so, dass, die Richtigkeit der letzteren vorausgesetzt, sie nicht bezweifelt werden kann*). Der Berechnung der Aberration, Nutation und Präcession liegen *Baily*'s schätzbare Tafeln zu Grunde, nach denen für jeden Stern eine Ephemeride von 10 zu 10 Tagen, unter Beihülfe der Hrn. *v. Nehus* und *Petersen*, berechnet, und in diese mit Berücksichtigung der zweiten Differenzen interpolirt wurde.

Die vierte Columne enthält endlich die Summe der drei ersten, also die wahre nur noch mit dem Collimationsfehler behaftete Zenithdistanz für die mittlere Stellung zu Anfang des Jahres 1827, wie sie sich aus jeder einzelnen Beobachtung ergiebt.

---

*) Die Richtigkeit von *Piazzi*'s Bestimmung dieses Sternes, auf 8 Beobachtungen gegründet, erhält durch die nahe Uebereinstimmung mit der Angabe der älteren Ausgabe seines Verzeichnisses von 1803, welche auf 6 Beobachtungen beruhte, eine Bestätigung; die genaue Grösse der eigenen Bewegung bleibt aber deswegen noch etwas ungewiss, weil das Jahr unbekannt ist, welches dem Mittel der Beobachtungen entspricht. Es ist merkwürdig, diese nicht unbeträchtliche eigene Bewegung bei einem Stern der 7. Grösse zu finden. Auch Nr. 11 scheint in dieser Beziehung die Aufmerksamkeit der Astronomen zu verdienen.

1. (24 Canum Venaticorum)*).

Göttingen. Limbus Ost.

April 5.	— 1° 37′ 52,62″	— 1,66″	+ 13,34″	— 1° 37′ 40,94″
17.	47,75	— 1,62	+ 10,12	39,25
18.	46,01	— 1,61	+ 7,15	40,47
29.	44,57	— 1,61	+ 6,88	39,30
		Mittel aus 4 Beobachtungen		— 1 37 39,99

Göttingen. Limbus West.

April 11.	— 1 37 43,60	— 1,59	+ 11,75	— 1 37 33,44
20.	40,36	— 1,62	+ 9,31	32,67
27.	37,29	— 1,67	+ 7,41	31,55
30.	36,84	— 1,55	+ 6,62	31,77
Mai 14.	34,23	— 1,60	+ 3,02	32,81
		Mittel aus 5 Beobachtungen		— 1 37 32,45

Altona. Limbus Ost.

Juni 4.	— 3 38 29,77	— 3,68	— 1,53	— 3 38 34,98
10.	26,44	— 3,58	— 2,57	32,59
11.	28,52	— 3,56	— 2,73	34,81
13.	29,85	— 3,53	— 3,03	36,41
15.	26,74	— 3,44	— 3,33	33,51
		Mittel aus 5 Beobachtungen		— 3 38 34,46

Altona. Limbus West.

Juni 3.	— 3 38 25,37	— 3,69	— 1,35	— 3 38 30,41
6.	25,44	— 3,59	— 1,89	30,92
9.	25,32	— 3,60	— 2,41	31,33
12.	26,07	— 3,54	— 2,89	32,50
		Mittel aus 4 Beobachtungen		— 3 38 31,29

*) Die Resultate der Beobachtungen für die übrigen 42 Sterne sind von *Gauss* selbst in derselben Form wie für 24 canum venaticorum gegeben. Da aber die Einzelresultate, speciell für den vorliegenden Zweck, ein besonderes Interesse nicht mehr beanspruchen können, ihre Benutzung bei der Ableitung und Discussion der Endresultate auch fast gar nicht in Frage kommt, so haben wir uns der Raumersparniss halber erlaubt, allein die Mittelwerthe der Zenithdistanzen für die einzelnen Lagen des Limbus in Göttingen und Altona unter Angabe der Anzahl der einzelnen Beobachtungen in nachstehender Tabelle zusammenzustellen.

D. H.

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
2.	83 Ursae majoris	O	+4° 1′ 43,86″	6	+2° 0′ 49,04″	6
		W	+4 1 50,74	7	+2 0 51,41	4
3.	η Ursae majoris	O	−1 21 5,00	6	−3 22 0,32	6
		W	−1 20 57,62	7	−3 21 57,02	6
4.	86 Ursae majoris	O	+3 3 3,52	6	+1 2 10,52	6
		W	+3 3 11,04	6	+1 2 12,34	3
5.	—	O	+3 54 7,57	6	—	—
		W	+3 54 15,03	6	+1 53 16,15	2
6.	Piazzi 13. 289	O	−4 56 11,92	6	−6 57 8,63	2
		W	−4 56 4,99	6	−6 57 3,92	4
7.	13 Bootis	O	−1 15 8,76	6	−3 16 2,46	6
		W	−1 15 0,56	6	−3 15 59,08	5
8.	ϰ Bootis sequ.	O	+1 4 15,23	7	−0 56 37,59	6
		W	+1 4 23,43	7	−0 56 35,80	6
9.	Piazzi 14. 56	O	+4 41 44,77	7	+2 40 50,46	4
		W	+4 41 52,26	6	+2 40 54,44	2
10.	Θ Bootis	O	+1 7 19,66	7	−0 53 33,07	6
		W	+1 7 27,64	7	−0 53 30,55	6
11.	Piazzi 14. 131	O	+2 7 41,46	6	+0 6 47,92	5
		W	+2 7 47,83	7	+0 6 50,69	4
12.	Piazzi 14. 164	O	+1 27 4,50	6	−0 33 49,36	5
		W	+1 27 10,63	7	−0 33 47,62	4
13.	39 Bootis med.	O	−2 5 41,35	6	−4 6 37,71	5
		W	−2 5 34,40	6	−4 6 33,62	5
14.	Piazzi 14. 235	O	−1 11 28,79	7	−3 12 23,62	6
		W	−1 11 21,46	6	−3 12 21,03	5
15.	44 Bootis med.	O	−3 11 59,25	6	−5 12 53,39	6
		W	−3 11 51,50	6	−5 12 50,68	5
16.	—	O	−2 18 5,07	5	−4 18 59,19	5
		W	−2 17 58,08	5	−4 18 55,64	5
17.	Piazzi 15. 39	O	+0 3 1,98	7	−1 57 51,14	6
		W	+0 3 9,04	7	−1 57 49,67	5
18.	—	O	+1 3 13,96	6	−0 57 38,86	6
		W	+1 3 21,22	7	−0 57 37,51	5
19.	—	O	+3 5 43,51	5	+1 4 49,15	6
		W	+3 5 50,35	7	+1 4 51,91	5

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
20.	—	O	+2° 58′ 2,56″	5	+0° 57′ 9,14″	6
		W	+2 58 9,88	6	+0 57 10,82	5
21.	—	O	+1 22 45,19	4	—0 38 8,10	6
		W	+1 22 52,08	6	—0 38 5,58	6
22.	—	O	—5 15 46,21	4	—7 16 42,67	6
		W	—5 15 40,01	6	—7 16 36,74	6
23.	—	O	+4 48 34,52	5	+2 47 41,15	6
		W	+4 48 43,51	6	+2 47 43,99	6
24.	—	O	—1 9 12,44	5	—3 10 6,25	6
		W	—1 9 4,57	6	—3 10 3,83	6
25.	Θ Draconis	O	+7 29 55,43	6	+5 29 1,78	6
		W	+7 30 3,20	6	+5 29 3,43	6
26.	—	O	—0 53 37,66	6	—2 54 32,76	6
		W	—0 53 30,58	6	—2 54 31,24	6
27.	Piazzi 16. 33	O	—5 11 34,78	2	—7 12 29,49	5
		W	—5 11 25,90	2	—7 12 25,54	3
28.	Piazzi 16. 56	O	+2 8 22,19	5	+0 7 28,11	6
		W	+2 8 28,72	6	+0 7 30,01	6
29.	—	O	+0 55 18,58	3	—1 5 34,18	6
		W	+0 55 26,37	3	—1 5 31,88	6
30.	—	O	+4 4 12,22	6	+2 3 18,70	6
		W	+4 4 21,31	5	+2 3 22,11	6
31.	—	O	—5 33 46,24	6	—7 34 40,56	6
		W	—5 33 37,20	5	—7 34 37,10	6
32.	16 Draconis	O	+1 43 12,10	6	—0 17 41,55	6
		W	+1 43 18,61	6	—0 17 39,29	6
33.	—	O	—1 15 37,82	5	—3 16 31,74	5
		W	—1 15 30,84	6	—3 16 29,53	6
34.	—	O	+5 33 45,63	6	+3 32 51,35	6
		W	+5 33 54,80	6	+3 32 54,68	6
35.	—	O	—4 35 3,23	5	—6 35 57,04	5
		W	—4 34 56,00	5	—6 35 54,30	5
36.	Piazzi 16. 253	O	—4 42 29,81	6	—6 43 24,28	5
		W	—4 42 21,13	6	—6 43 21,61	5
37.	Piazzi 16. 291	O	+5 24 50,78	6	+3 23 55,60	5
		W	+5 24 58,73	6	+3 23 59,42	6

Nr.	Stern.	Lage des Limb.	Zenithdistanz in Göttingen.	Anzahl der Beob.	Zenithdistanz in Altona.	Anzahl der Beob.
38.	Piazzi 16. 310	O	−2° 29′ 4,29″	6	−4° 29′ 58,97″	5
		W	−2 28 57,26	6	−4 29 55,84	5
39.	Piazzi 17. 20	O	+6 57 58,55	1	+4 57 2,69	4
		W	+6 58 6,88	3	+4 57 5,60	4
40.	Piazzi 17. 38	O	+5 20 28,25	2	+3 19 36,52	3
		W	+5 20 38,33	3	+3 19 38,56	3
41.	74 Herculis	O	−5 6 58,39	2	−7 7 53,30	5
		W	−5 6 51,47	3	−7 7 49,79	5
42.	Piazzi 17. 120	O	+5 38 21,52	2	+3 37 26,27	5
		W	+5 38 29,20	2	+3 37 31,18	4
43.	β Draconis	O	+0 54 5,81	2	−1 6 47,62	5
		W	+0 54 14,61	2	−1 6 45,60	5

III. Resultate.

1.

Die kunstloseste Combination der Beobachtungen zu einem Resultate für den Breitenunterschied der Beobachtungsplätze besteht darin, jeden Stern für sich zu betrachten. Ist, bei resp. östlicher und westlicher Lage des Limbus, die beobachtete Zenithdistanz in Göttingen a und a', in Altona b und b', so wird der Breitenunterschied $= \frac{1}{2}(a + a') - \frac{1}{2}(b + b')$. Man bekommt daher so viele Resultate, als Sterne vollständig beobachtet sind; für unsere Beobachtungen 42, da nur Nr. 5, als in Altona einseitig beobachtet, ausfällt.

Wären die Beobachtungen, auf welchen die Bestimmungen a, a', b, b' beruhen für alle Sterne gleich zahlreich, so würden alle einzelnen Resultate für den Breitenunterschied für gleich zuverlässig zu halten, und daher das einfache arithmetische Mittel das wahrscheinlichste Endresultat sein. Bei unseren Beobachtungen findet jene Voraussetzung nicht statt, und es muss daher den Resultaten nach Maassgabe der Anzahl der Beobachtungen ein ungleiches Gewicht beigelegt werden.

Wenn man sich erlaubt, die Fehler aller einzelnen Beobachtungen als unabhängig von einander zu betrachten, das Gewicht einer einzelnen Beobachtung als Einheit annimmt, und die Anzahl

der Beobachtungen, welche zu den Bestimmungen a, a', b, b' concurrirt haben, durch α, α', β, β', bezeichnet, so wird, nach bekannten Gründen, das Gewicht des Resultats $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a' - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b'$ durch

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}}$$

ausgedrückt werden. Unsere 42 Resultate mit ihren Gewichten sind hiernach folgende:

Stern.	Breitenunterschied.	Gewicht.	Stern.	Breitenunterschied.	Gewicht.
1	2° 0′ 56,65″	4,44	23	2° 0′ 56,45″	5,71
2	57,07	5,51	24	56,53	5,71
3	57,36	6,22	25	56,71	6,00
4	55,85	4,80	26	57,88	6,00
6	57,81	3,69	27	57,17	2,61
7	56,11	5,71	28	56,39	5,71
8	56,03	6,46	29	55,51	4,00
9	56,07	3,78	30	56,37	5,71
10	55,46	6,46	31	57,11	5,71
11	55,35	5,27	32	55,78	6,00
12	56,05	5,27	33	56,31	5,45
13	57,78	5,45	34	57,19	6,00
14	57,19	5,92	35	56,06	5,00
15	56,65	5,71	36	57,48	5,45
16	55,85	5,00	37	57,24	5,71
17	55,92	6,13	38	56,62	5,45
18	55,78	5,92	39	58,51	2,18
19	56,40	5,64	40	55,75	2,67
20	56,24	5,45	41	56,61	3,24
21	55,48	5,33	42	56,64	2,76
22	56,59	5,33	43	56,82	2,86

Das Mittel aus diesen 42 Bestimmungen, mit Rücksicht auf die Ungleichheit der Gewichte, findet sich

2° 0′ 56,52″

und das Gewicht dieses Resultats = 213,41.

2.

Wenn n verschiedene Bestimmungen einer Grösse die Werthe A, A′, A″ etc. mit den Gewichten p, p', p'' etc. gegeben haben, A* den mit Rücksicht auf die Gewichte genommenen Mittelwerth, und M die Summe

$$p(\mathrm{A}-\mathrm{A}^*)^2+p'(\mathrm{A}'-\mathrm{A}^*)^2+p''(\mathrm{A}''-\mathrm{A}^*)^2+\text{etc.}$$

bedeuten, so wird in Folge des allgemeineren Lehrsatzes in der Theoria Combinationis Observationum, Art. 38.,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{n-1}}$$

einen genäherten Werth des mittleren Fehlers einer Beobachtung derselben Art, deren Gewicht $=1$ ist, geben. Die Anwendung dieser Vorschrift auf unseren Fall giebt $\mathrm{M}=103{,}4126$, und damit den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$\sqrt{\frac{103{,}41}{41}}=1{,}5882''.$$

Den mittleren in unserem Resultat für den Breitenunterschied zu befürchtenden Fehler erhält man, wenn man den mittleren Fehler einer Beobachtung mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht jenes Resultats dividirt; aus obigem Werthe folgt er demnach $=0{,}1087''$.

3.

Der Collimationsfehler des Instruments ergiebt sich aus den Beobachtungen eines jeden Sternes in Göttingen $=\frac{1}{2}(a'-a)$ mit dem Gewicht $\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$, und in Altona $=\frac{1}{2}(b'-b)$ mit dem Gewicht $\frac{4\beta\beta'}{\beta+\beta'}$. Folgende Tafel enthält diese Werthe.

Stern.	Göttingen.		Altona.		Stern.	Göttingen.		Altona.	
	Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.		Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.
1	3,77″	8,89	1,58″	8,89	6	3,46″	12,00	2,35″	5,33
2	3,44	12,92	1,19	9,60	7	4,10	12,00	1,69	10,91
3	3,69	12,92	1,65	12,00	8	4,10	14,00	0,90	12,00
4	3,76	12,00	0,91	8,00	9	3,75	12,92	1,99	4,00
5	3,73	12,00	—	—	10	3,99	14,00	1,26	12,00

Stern.	Göttingen.		Altona.		Stern.	Göttingen.		Altona.	
	Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.		Coll. F.	Gew.	Coll. F.	Gew.
11	3,19″	12,92	1,39″	8,89	28	3,27″	10,91	0,95″	12,00
12	3,06	12,92	0,87	8,89	29	3,89	6,00	1,15	12,00
13	3,48	12,00	2,04	10,00	30	4,54	10,91	1,70	12,00
14	3,67	12,92	1,30	10,91	31	4,52	10,91	1,73	12,00
15	3,87	12,00	1,36	10,91	32	3,26	12,00	1,13	12,00
16	3,50	10,00	1,77	10,00	33	3,49	10,91	1,11	10,91
17	3,53	14,00	0,74	10,91	34	4,58	12,00	1,66	12,00
18	3,63	12,92	0,68	10,91	35	3,61	10,00	1,37	10,00
19	3,42	11,67	1,38	10,91	36	4,33	12,00	1,34	10,00
20	3,66	10,91	0,84	10,91	37	3,97	12,00	1,91	10,91
21	3,45	9,60	1,26	12,00	38	3,52	12,00	1,56	10,00
22	3,10	9,60	2,96	12,00	39	4,16	3,00	1,45	8,00
23	4,49	10,91	1,42	12,00	40	5,04	4,80	1,02	6,00
24	3,93	10,91	1,21	12,00	41	3,46	4,80	1,75	10,00
25	3,88	12,00	0,83	12,00	42	3,84	4,00	2,45	8,89
26	3,54	12,00	0,76	12,00	43	4,40	4,00	1,01	10,00
27	4,44	4,00	1,97	7,50					

Die Mittelwerthe sind folgende:

Collimationsfehler in Göttingen . 3,75″ mit dem Gewicht 455,17
Collimationsfehler in Altona . . 1,40 mit dem Gewicht 432,18.

Die Realität der Veränderung des Collimationsfehlers ist offenbar, und es leidet keinen Zweifel, dass dieselbe auf dem obwohl mit aller möglichen Vorsicht geleiteten Transport eingetreten ist.

4.

Obgleich man sich bei dem für den Breitenunterschied gefundenen Resultate vollkommen beruhigen kann, so ist es doch wenigstens in theoretischer Rücksicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die im 1. Art. angewandte Combination der Beobachtungen noch nicht die möglich vortheilhafteste ist, insofern nicht an jedem Ort jeder Stern in der einen Lage des Sectors eben so oft beobachtet ist, wie in der andern. In der That hat die Bestimmung der wahren Zenithdistanz in Göttingen durch die Formel $\frac{1}{2}(a + a')$

das Gewicht $\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$; wäre nun der Collimationsfehler in Göttingen genau bekannt und $= f$, so würde die Bestimmung der wahren Zenithdistanz daselbst durch die Formel

$$\frac{\alpha(a+f)+\alpha'(a'-f)}{\alpha+\alpha'}$$

das Gewicht $\alpha+\alpha' = \frac{4\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'} + \frac{(\alpha-\alpha')^2}{\alpha+\alpha'}$ haben, d. i. ein grösseres als nach der anderen Methode, so oft α und α' ungleich sind. Ebenso verhält es sich mit der wahren Zenithdistanz in Altona, und auf diese Art würden selbst einseitige Beobachtungen (wie die von Nr. 5) einen, wenn auch nur geringen, Beitrag zur Vergrösserung der Genauigkeit geben. Nun sind zwar die Collimationsfehler an beiden Plätzen nicht mit absoluter Schärfe bekannt: allein man überzeugt sich leicht, dass die Anwendung der für dieselben gefundenen Mittelwerthe das Gewicht nur ganz unbedeutend vermindert.

5.

Will man jedoch ein reines, den Forderungen der strengen Theorie ganz Genüge leistendes Resultat erhalten, so muss man die Bestimmung des Breitenunterschiedes, der Collimationsfehler, und der wahren Zenithdistanzen der einzelnen Sterne an dem einen Ort als ein Problem behandeln, wo diese unbekannten Grössen (in unserem Fall 46 an der Zahl) aus den sämmtlichen durch sie bestimmten beobachteten Grössen (171) durch eben so viele Gleichungen abgeleitet werden müssen, indem diese nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung combinirt werden. Setzt man die Collimationsfehler in Göttingen und Altona $= f$ und g, den Breitenunterschied $= h$, die wahre Zenithdistanz eines Sterns in Göttingen $= k$, so hat man aus den Beobachtungen dieses Sternes die vier Gleichungen, mit den Gewichten α, α', β, β':

$$\begin{aligned} a &= k - f \\ a' &= k + f \\ b &= k - g - h \\ b' &= k + g - h. \end{aligned}$$

Es ist kaum nöthig zu erinnern, dass es zur Erleichterung der Rechnung vortheilhafter ist, anstatt jener unbekannten Grössen, die noch erforderlichen Correctionen einzuführen, welche an die

schon sehr nahe bestimmten Werthe anzubringen sind; lassen wir die Zeichen f^0, g^0, h^0, k^0 diese genäherten Werthe bedeuten, so mag man annehmen

$$k^0 = \frac{\alpha(a+f^0) + \alpha'(a'-f^0) + \beta(b+g^0+h^0) + \beta'(b'-g^0+h^0)}{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'}.$$

Bei Befolgung jener Vorschrift (welche man bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf nur etwas zusammengesetzte Fälle niemals aus den Augen setzen sollte) und dem Gebrauch einer schicklichen indirekten Auflösungsmethode verwandelt sich eine Arbeit, die ohne jene und bei direkter Elimination unerträglich weitläufig ausfällt, in ein leichtes Spiel.

6.

Der Erfolg dieser Rechnung, welche ausführlich herzusetzen unnöthig wäre, ist, dass die früheren Bestimmungen gar keine merkliche Correction erhalten. Es findet sich die Verbesserung des Breitenunterschiedes = — 0,014″, die Verbesserung des Collimationsfehlers in Göttingen = + 0,012″, die Verbesserung des Collimationsfehlers in Altona = — 0,014″; folglich die neuen Bestimmungen

Breitenunterschied	2° 0′ 56,51″,	Gewicht =	217,67
Collimationsfehler in Göttingen	3,76	„	457,03
Collimationsfehler in Altona	1,39	„	437,64 .

Die Veränderungen der nach der Vorschrift des vorhergehenden Artikels zu Grunde gelegten wahren Zenithdistanzen der einzelnen Sterne in Göttingen sind gleichfalls fast alle unter 0,01″. Die sich ergebenden Werthe hier anzuführen, wäre überflüssig, da es dieselben sind, aus welchen die oben mitgetheilten Declinationen der Sterne unter Voraussetzung der Polhöhe des Beobachtungsplatzes 51° 31′ 47,92″ abgeleitet sind. Dagegen setzen wir die Unterschiede hier her, welche nach Substitution der gefundenen Werthe in den 171 Gleichungen übrig bleiben.

Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.
1	+ 0,07″	2	+ 0,56″	3	+ 0,48″	4	— 0,35″
	+ 0,09		— 0,08		+ 0,34		— 0,35
	— 0,26		— 0,12		— 0,70		+ 0,79
	+ 0,13		— 0,53		— 0,18		— 0,17

Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.
5	+ 0,03″	14	+ 0,40″	23	— 0,80″	32	+ 0,14″
	— 0,03		+ 0,21		+ 0,67		— 0,87
	—		— 0,29		— 0,03		+ 0,63
	— 0,03		— 0,48		+ 0,03		+ 0,11
6	+ 0,62	15	— 0,04	24	— 0,17	33	+ 0,19
	+ 0,03		+ 0,19		+ 0,18		— 0,35
	— 1,95		— 0,04		+ 0,16		+ 0,41
	— 0,02		— 0,11		— 0,20		— 0,16
7	— 0,52	16	— 0,07	25	— 0,03	34	— 0,48
	+ 0,16		— 0,60		+ 0,22		+ 1,17
	— 0,08		— 0,05		+ 0,46		— 0,62
	+ 0,52		+ 0,72		— 0,67		— 0,07
8	— 0,56	17	— 0,06	26	+ 0,90	35	— 0,08
	+ 0,12		— 0,52		+ 0,46		— 0,37
	+ 0,76		+ 0,96		— 0,06		+ 0,25
	— 0,23		— 0,35		— 1,32		+ 0,21
9	— 0,06	18	— 0,23	27	— 0,14	36	— 0,14
	— 0,09		— 0,49		+ 1,22		+ 1,02
	— 0,23		+ 1,09		— 0,71		— 0,47
	+ 0,97		— 0,34		+ 0,46		— 0,58
10	— 0,71	19	+ 0,32	28	+ 0,46	37	+ 0,11
	— 0,25		— 0,36		— 0,53		+ 0,54
	+ 0,70		+ 0,10		+ 0,52		— 0,93
	+ 0,44		+ 0,08		— 0,36		+ 0,11
11	+ 0,12	20	— 0,06	29	— 0,80	38	+ 0,30
	— 1,03		— 0,26		— 0,53		— 0,19
	+ 0,72		+ 0,66		+ 0,58		— 0,24
	+ 0,71		— 0,44		+ 0,10		+ 0,11
12	+ 0,52	21	— 0,22	30	— 0,83	39	+ 0,90
	— 0,87		— 0,85		+ 0,74		+ 1,71
	+ 0,80		+ 0,63		— 0,21		— 0,82
	— 0,24		+ 0,37		+ 0,42		— 0,69
13	+ 0,87	22	+ 0,77	31	— 0,41	40	— 1,81
	+ 0,30		— 0,55		+ 1,11		+ 0,75
	— 1,35		— 1,55		— 0,59		+ 0,60
	— 0,04		+ 1,60		+ 0,09		— 0,14

Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.	Stern.	Unterschied.
41	+ 0,39″	42	+ 0,09″	43	— 0,42″
	— 0,21		+ 0,25		+ 0,86
	— 0,38		— 1,02		+ 0,29
	+ 0,35		+ 1,11		— 0,47

7.

Die Summe der Produkte aus den Quadraten dieser 171 Unterschiede in die entsprechende Anzahl der Beobachtungen findet sich = 292,8249. Nach dem bereits angeführten Lehrsatz (Theoria Comb. Observ. Art. 38.) hat man als genäherten Werth des mittleren Fehlers einer einfachen Beobachtung die Quadratwurzel aus dem Bruch zu betrachten, dessen Zähler jene Summe, und der Nenner der Ueberschuss der Anzahl der verglichenen Beobachtungsdata über die Anzahl der nach der Methode der kleinsten Quadrate daraus abgeleiteten unbekannten Grössen ist, in unserem Falle 171 — 46 = 125. Es findet sich hieraus jener mittlere Fehler = 1,5308″, wenig von dem im 2. Art. gefundenen verschieden. Der mittlere in dem Endresultate für den Breitenunterschied zu befürchtende Fehler würde demnach sein

$$= \frac{1{,}5308''}{\sqrt{217{,}67}} = 0{,}1038''.$$

8.

Bei den bisherigen Rechnungen ist vorausgesetzt, dass alle den verschiedenen Beobachtungen anhängenden Fehler als völlig unabhängig von einander oder als rein zufällig betrachtet werden können. Diese Voraussetzung aber ist offenbar nicht ganz richtig, indem alle α Beobachtungen, welche zu der Bestimmung eines a concurrirt haben, nach der Natur des Instrumentes sich auf einen und denselben Theilungspunkt beziehen, und also ausser den eigentlichen rein zufälligen Beobachtungsfehlern noch den Fehler der Theilung bei diesem Punkte involviren. Dasselbe gilt von a', b und b'. Die Theilungsfehler sind ihrerseits unbekannte Grössen, die in Beziehung auf die einzelnen 171 Beobachtungsresultate auch als rein zufällig und von einander unabhängig betrachtet werden

mögen, da man die Fälle, wo verschiedene derselben sich auf einerlei Theilungspunkt bezogen haben, ihrer geringen Anzahl wegen ignoriren kann. Die Berücksichtigung dieses Umstandes macht nun eine Modification obiger Rechnungen nothwendig, obwohl am Ende in praktischer Rücksicht die Resultate gar nicht geändert werden.

Bezeichnet man den eigentlichen mittleren Beobachtungsfehler, der nur von zufälligen Ursachen mit Ausschluss der Theilungsfehler herrührt, mit m, und den mittleren Theilungsfehler mit μ, so wird der vollständige mittlere Beobachtungsfehler $= \sqrt{m^2 + \mu^2}$ zu setzen sein, und der mittlere Fehler eines Mittels aus α Beobachtungen, die sich auf einerlei Theilungspunkt beziehen,

$$= \sqrt{\frac{m^2}{\alpha} + \mu^2},$$

oder wenn wir $\mu^2 = m^2 \Theta$ setzen,

$$= m \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \Theta}.$$

Insofern wir also das Gewicht einer Beobachtung, ohne Theilungsfehler, zur Einheit annehmen, wird das Gewicht von a nunmehr

$$= \frac{\alpha}{1 + \alpha\Theta}$$

sein, und ebenso die Gewichte von a', b, b' bezw.

$$= \frac{\alpha'}{1 + \alpha'\Theta}, \quad \frac{\beta}{1 + \beta\Theta}, \quad \frac{\beta'}{1 + \beta'\Theta}.$$

Bei der ersteren Combinationsmethode wird man daher das Gewicht des Resultates für den Breitenunterschied aus den Beobachtungen eines Sternes, wenn man den vorigen Ausdruck

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}} = p$$

setzt, jetzt

$$= \frac{p}{1 + p\Theta}$$

zu setzen, und nach Maassgabe dieser Gewichte aus den 42 Bestimmungen das Mittel zu nehmen haben. Bei der zweiten Combinationsmethode hingegen hat man nur jeder der 171 Gleichungen

ein Gewicht beizulegen, welches durch eine der Formeln $\frac{\alpha}{1+\alpha\Theta}$ etc. bestimmt wird.

Offenbar kann eine Veränderung des Endresultates selbst sowohl, als des mittleren in demselben zu befürchtenden Fehlers nur dadurch eintreten, dass die neuen Gewichte den früheren nicht proportional sind. Bei der vorigen Methode waren nur die Resultate der zahlreicheren Beobachtungsreihen etwas zu viel bevorzugt; die Berücksichtigung der Theilungsfehler bringt ihre Gewichte der Gleichheit näher, desto mehr, je grösser die Theilungsfehler vorausgesetzt werden, so dass bei Beobachtungen mit einem Instrumente, wo die Theilungsfehler die eigentlichen Beobachtungsfehler sehr weit überwögen, man sich nur begnügen könnte, alle Bestimmungen als gleich zuverlässig zu betrachten.

9.

Die angezeigten Methoden haben also gar keine Schwierigkeit, sobald nur der Coefficient Θ bekannt ist. Man kann zu einer genäherten Kenntniss desselben, auf welche es hier begreiflich nur ankommt, auf einem indirekten Wege gelangen.

Wir bemerken zuvörderst, dass die Beobachtungen selbst ein Mittel darbieten, den eigentlichen mittleren Beobachtungsfehler m mit sehr grosser Zuverlässigkeit zu bestimmen. In der That macht sich derselbe unabhängig von dem Theilungsfehler in den Unterschieden der einzelnen Werthe, aus denen jedes a (oder a', b, b') das Mittel ist, von einander oder von diesem Mittel, bemerkbar, und wenn α sehr gross wäre, so würde die Summe der Quadrate dieser Unterschiede der einzelnen Werthe von a vom Mittel als eine genäherte Bestimmung von $(\alpha-1)\,m^2$ anzusehen sein. Eine solche einzelne Bestimmung kann nun zwar in unserem Fall, wo α nie grösser als 7 ist, von dem richtigen Werthe sehr abweichen; allein die Summe aller 171 partiellen Summen (für alle a, a', b, b' und für alle Sterne) muss nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von

$$\{\Sigma(\alpha-1)+\Sigma(\alpha'-1)+\Sigma(\beta-1)+\Sigma(\beta'-1)\}\,m^2,$$

in unserem Fall von $728\,m^2$, wenig verschieden sein. Wir haben jene Summe der 171 partiellen Summen

$$=844{,}50$$

gefunden, woraus sich für m der sehr zuverlässige Werth

$$= 1{,}0770''$$

ergiebt, bedeutend kleiner als der im 2. und 7. Artikel gefundene. Es bestätigt sich also die Einwirkung der Theilungsfehler vollkommen, um derentwillen die früher herausgebrachten Zahlen kein reines Resultat geben konnten.

10.

In Ermangelung einer direkten Kenntniss des mittleren Theilungsfehlers kann man nun Θ auf eine indirekte Art so bestimmen, dass beim Gebrauch der ersten Methode nach dem Verfahren des Art. 2., oder beim Gebrauch der zweiten Methode nach dem Verfahren des Art. 7., der mittlere Fehler einer Beobachtung, deren Gewicht als Einheit angenommen war, wiederum dem gefundenen Werthe von m gleich wird.

Es hat indessen nicht belohnend genug geschienen, solche Versuche so lange zu wiederholen, bis eine vollkommene Uebereinstimmung erreicht wäre. Vielmehr schien es hinreichend, nachdem durch anderweitige Betrachtungen erkannt war, dass der letzte Werth von Θ nur wenig von 0,2 verschieden ausfallen könnte, diesen Werth bloss der ersten Combinationsmethode unterzulegen, woraus sich dann ergeben hat

Breitenunterschied . . . . = 2° 0′ 56,50″
Gewicht dieser Bestimmung . . = 104,29

Mittlerer Fehler einer Beobachtung, deren Gewicht die Einheit . . . . = 1,131″,

und daher der mittlere in obigem Endresultate zu befürchtende Fehler

$$= 0{,}1108''.$$

Die Anwendung der zweiten Combinationsmethode, mit demselben Werthe von Θ, würde vermuthlich eine noch nähere Uebereinstimmung mit obigem Werthe von m hervorgebracht, das Endresultat für den Breitenunterschied vielleicht um 0,01″ vermindert, das Gewicht dieser Bestimmung gewiss etwas weniges vergrössert haben; es wurde aber der Mühe nicht werth gehalten, deshalb diese Rechnung von neuem durchzuführen. Man kann sich also an

den gefundenen Breitenunterschied 2° 0′ 56,50″ halten, und dessen Fehler als wahrscheinlich zwischen den Grenzen ± 0,07″ enthalten ansehen.

11.

Wenn wir den obigen Werth von Θ beibehalten, so ergiebt sich der mittlere Theilungsfehler $= m \sqrt{\Theta} = 0{,}48''$, daher der sogenannte wahrscheinliche Theilungsfehler der einzelnen Punkte $= 0{,}32''$ gesetzt werden mag. Offenbar bezieht sich dies aber nur auf die unregelmässigen Theilungsfehler, oder auf die Abweichungen der einzelnen Punkte von einer fingirten sich diesen so genau wie möglich anschliessenden gleichförmigen Theilung, deren absolute Richtigkeit hierbei eigentlich gar nicht in Frage kommen konnte. Oder mit anderen Worten, das gefundene Resultat für den Breitenunterschied mit der ihm beigelegten Genauigkeit bezieht sich, streng genommen, nur auf mittlere Sectorgrade, und bleibt von der absoluten Richtigkeit derselben abhängig. Dem Astronomen bietet das Instrument gar kein selbständiges Mittel dar, diese zu prüfen. Wenn man indessen erwägt, dass die Endpunkte des Bogens von dem Künstler mit äusserster Sorgfalt niedergelegt sind, und dass hier nur von einem kleinen Theile des ganzen Bogens die Rede ist, so wird man zugeben müssen, dass die Unsicherheit des gefundenen Breitenunterschiedes aus dieser Quelle nur um ein sehr Geringes vergrössert werden kann. Eine Controlle für die absolute Richtigkeit der Theilung geben übrigens auch die von mir am *Reichenbach*'schen Meridiankreise beobachteten Zenithdistanzen derselben 43 Sterne, deren Unterschiede von den am Sector beobachteten, bei einer Anordnung nach den Declinationen, keine Spur von Regelmässigkeit zeigen.

12.

Der Platz des Mittelpunkts des Sectors in Göttingen war 1,060 Toisen nördlich und 7,595 Toisen östlich vom Centrum der Axe des *Reichenbach*'schen Meridiankreises; in Altona hingegen war der Mittelpunkt des Sectors 13,511 Toisen südlich und 2,578 westlich vom Mittelpunkt des dortigen Meridiankreises. Die Reduktion des Breitenunterschiedes der Sectorplätze auf den der Meridiankreise ist daher für Göttingen 0,07″ und für Altona 0,85″, und folglich der Breitenunterschied der Sternwarten von Göttingen und Altona in Beziehung auf die Plätze der *Reichenbach*'schen Meridiankreise

$$= 2^\circ\ 0'\ 57{,}42''.$$

13.

Die absolute Polhöhe, welche den oben gegebenen aus den Zenithdistanzen abgeleiteten Declinationen der Sterne zu Grunde gelegt ist, beruht auf 89 Beobachtungen des Nordsterns, am *Reichenbach*'schen Meridiankreise, in beiden Culminationen, direkt und von einer Wasserfläche reflectirt. Da die Beobachtungen von 1824, welche den grössten Theil ausmachen, bisher noch nicht bekannt gemacht sind, so stelle ich hier sämmtliche Beobachtungen zusammen, und bemerke nur, dass meistens die direkte Einstellung beim Antritt an den zweiten, vierten (mittelsten), und sechsten Faden, die Einstellung des reflectirten Bildes hingegen beim Antritt an den ersten, dritten, fünften und siebenten Faden gemacht ist. Von diesen auf die Culminationszeit reducirten Zenithdistanzen, ist hier das Mittel angegeben, welches bloss von der Refraction nach *Bessel*'s Tafeln befreit ist, also Collimationsfehler und Wirkung der Biegung des Fernrohrs noch einschliesst.

Zenithdistanzen des Nordsterns.

1820. Kreis im Osten.

Mai 13.	Untere Culm.	Direct	319°	50′	20,73″	3 Beob.
		Reflectirt	220	5	3,94	4 „
„ 13.	Obere Culm.	Direct	323	8	41,51	1 „
		Reflectirt	216	46	44,31	1 „

1824. Kreis im Osten.

Apr. 20.	Obere Culm.	Direct	323	7	52,62	1 „
		Reflectirt	216	48	54,93	2 „
„ 21.	Untere Culm.	Direct	319	52	30,27	3 „
		Reflectirt	220	4	19,32	4 „
„ 21.	Obere Culm.	Direct	323	7	54,16	3 „
		Reflectirt	216	48	54,21	4 „
„ 25.	Untere Culm.	Direct	319	52	30,03	3 „
		Reflectirt	220	4	21,10	4 „
„ 27.	Obere Culm.	Direct	323	7	55,70	3 „
		Reflectirt	216	48	52,93	4 „
„ 28.	Obere Culm.	Direct	323	7	55,40	3 „
		Reflectirt	216	48	52,22	4 „
„ 29.	Untere Culm.	Direct	319	52	29,17	3 „
		Reflectirt	220	4	21,34	4 „

Mai 1.	Untere Culm.	Direct	319°	52′	28,59″	3	Beob.
		Reflectirt	220	4	22,62	4	„
„ 1.	Obere Culm.	Direct	323	7	57,22	3	„
		Reflectirt	216	48	51,66	4	„

1824. Kreis in Westen.

Mai 2.	Untere Culm.	Direct	40	4	20,00	3	„
		Reflectirt	139	52	27,15	4	„
„ 8.	Obere Culm.	Direct	36	48	49,32	3	„
		Reflectirt	143	7	57,63	4	„
„ 9.	Untere Culm.	Direct	40	4	22,93	3	„
		Reflectirt	139	52	25,68	4	„

Die Aenderungen der Declination des Nordsterns ergeben sich aus *Bessel's* Tafeln wie folgt:

1820 von der unteren Culmination des 13. Mai an gerechnet:
Mai 13. Obere Culm. — 0,10″.

1824 von der oberen Culmination des 20. April an gerechnet:

April	21.	U. C.	— 0,13″
„	21.	O. C.	— 0,26
„	25.	U. C.	— 1,29
„	27.	O. C.	— 2,04
„	28.	O. C.	— 2,32
„	29.	U. C.	— 2,45
Mai	1.	U. C.	— 2,93
„	1.	O. C.	— 3,03
„	2.	U. C.	— 3,14
„	8.	O. C.	— 4,64
„	9.	U. C.	— 4,77 .

14.

Bezeichnet man die Biegung des Fernrohrs, oder die Veränderung der Lage der auf die Ebene des getheilten Kreises projicirten optischen Axe gegen die Eintheilung, vermöge der Einwirkung der Schwere auf sämmtliche verbundenen Bestandtheile des Instruments, bei horizontaler Lage der optischen Axe durch f, bei verticaler durch g, und setzt voraus, dass diese Biegung der Schwerkraft proportional ist (was bei der äusserst geringen Grösse der ganzen Wirkung unbedenklich scheint), so wird bei der Neigung

der optischen Axe z die Biegung durch $f \sin z + g \cos z$ ausgedrückt werden, so verstanden, dass wenn der Collimationsfehler $= e$ und die abgelesene Zenithdistanz $= z$ ist, die wahre Zenithdistanz

$$= z - e + f \sin(z - e) + g \cos(z - e)$$

sein wird. Wäre das Fernrohr vollkommen symmetrisch, so würde g ganz wegfallen; allein da keine menschliche materielle Arbeit absolut vollkommen ist, und überdies die vollkommene Symmetrie schon durch die Balancirgewichte gewissermaassen gestört wird, so scheint es durchaus nicht ungereimt, die Möglichkeit eines ein oder ein paar Zehntheile einer Secunde betragenden Werthes von g zuzugeben, und wenn einmal die Rechnung auf einzelne Zehntheile oder gar Hunderttheile der Secunde genau geführt wird, so würde es inconsequent sein, die Berücksichtigung des zweiten Theiles der Biegung, insofern sie möglich ist, zu unterlassen.

15.

Das Complement des halben Unterschiedes der direkt und durch Reflexion gemessenen Zenithdistanz zu 90° giebt die Zenithdistanz vom Collimationsfehler und von dem ersten Theile der Biegung befreit, also bloss noch den zweiten Theil der Biegung enthaltend, und zwar mit entgegengesetztem Zeichen, nachdem der Kreis im Osten oder Westen ist. Offenbar bezieht sich diese Zenithdistanz auf die Verticale an der Stelle, wo die optische Axe das Wassergefäss trifft, welche, für beide Culminationen des Nordsterns unmerklich verschieden, um 0,05″ nördlicher ist als die Axe des Kreises. Diese Combination ist unserem Zwecke auch insofern angemessener, als man der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers während der ganzen Dauer der Beobachtungen von 1824 ausweicht. Das Gewicht jener Bestimmung wird, wenn man die Anzahl der direkten Beobachtungen $= \alpha$, die der Reflexionsbeobachtungen $= \beta$ setzt, $= \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta}$, insofern man die Beobachtungsfehler als rein zufällig und von einander unabhängig betrachtet.

16.

Bezeichnen wir nun mit

φ die Polhöhe an dem Platz des Wassergefässes

δ die Declination des Nordsterns in der unteren Culmination des 13. Mai 1820

δ' die Declination in der oberen Culmination des 20. April 1824,

so geben uns die Beobachtungen folgende Bestimmungen:

für $\delta + \varphi - 0{,}765\,g$

1820 Mai 13 . . .	139°	52′	38,40″	, Gewicht	6,86

für $\delta - \varphi + 0{,}800\,g$

1820 Mai 13 . . .	36	49	1,50	, Gewicht	2,00

für $\delta' + \varphi - 0{,}765\,g$

1824 Apr. 21 . . .	139	54	5,61	, Gewicht	6,86
„ 25 . . .	139	54	5,76	„	6,86
„ 29 . . .	139	54	6,36	„	6,86
Mai 1 . . .	139	54	5,91	„	6,86

für $\delta' - \varphi + 0{,}800\,g$

1824 Apr. 20 . . .	36	50	31,15	, Gewicht	2,67
„ 21 . . .	36	50	30,29	„	6,86
„ 27 . . .	36	50	30,65	„	6,86
„ 28 . . .	36	50	30,73	„	6,86
Mai 1 . . .	36	50	30,25	„	6,86

für $\delta' + \varphi + 0{,}765\,g$

1824 Mai 2 . . .	139	54	6,71	, Gewicht	6,86
„ 9 . . .	139	54	6,15	„	6,86

für $\delta' - \varphi - 0{,}800\,g$

1824 Mai 8 . . .	36	50	30,48	, Gewicht	6,86.

Wir erhalten demnach zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen δ, δ', φ, g die sechs Gleichungen:

$\delta + \varphi - 0{,}765\,g =$	139°	52′	38,40″	, Gewicht	6,86
$\delta - \varphi + 0{,}800\,g =$	36	49	1,50	„	2,00
$\delta' + \varphi - 0{,}765\,g =$	139	54	5,91	„	27,43
$\delta' - \varphi + 0{,}800\,g =$	36	50	30,54	„	30,10
$\delta' + \varphi + 0{,}765\,g =$	139	54	6,43	„	13,71
$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g =$	36	50	30,48	„	6,86,

woraus sich durch die Methode der kleinsten Quadrate*) folgende Werthe ergeben:

---

*) Hier etwas bequemer nach dem Verfahren im Supplem. Theor. Comb. Observ.

$$\begin{aligned}
\delta &= 88^\circ\ 20'\ 50{,}33'' \\
\delta' &= 88\ \ 22\ \ 18{,}28 \\
\varphi &= 51\ \ 31\ \ 47{,}90 \\
g &= \qquad\ \ +0{,}17\,.
\end{aligned}$$

Das Gewicht der Bestimmung von φ wird hierbei $= 60{,}8$.

Um für die Genauigkeit der Beobachtungen einigermaassen einen Maassstab zu haben, substituiren wir diese Werthe in die vierzehn Gleichungen, aus welchen die vorigen sechs zusammengezogen waren; es bleiben dann folgende Fehler übrig:

Fehler	Gewicht der Gleichung
— 0,31″	6,86
+ 1,07	2,00
+ 0,44	6,86
+ 0,29	6,86
— 0,31	6,86
+ 0,14	6,86
— 0,63	2,67
+ 0,23	6,86
— 0,13	6,86
— 0,21	6,86
+ 0,27	6,86
— 0,40	6,86
+ 0,16	6,86
— 0,23	6,86 .

Die Summe der Produkte der Quadrate dieser Fehler in die Gewichte wird $= 9{,}6184$; also ein genäherter Werth für den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$= \sqrt{\frac{9{,}6184}{10}} = 0{,}981''.$$

Der mittlere in dem Endresultat für die Polhöhe zu befürchtende Fehler, so weit er von unregelmässig wirkenden Ursachen herrührt, ist demnach

$$= \frac{0{,}981''}{\sqrt{60{,}8}} = 0{,}126''.$$

Etwas muss aber die Unsicherheit des Resultates allerdings grösser sein, da die Voraussetzung, dass sämmtliche Beobachtungs-

fehler ohne Ordnung von einander unabhängig sind, nicht ganz richtig ist. Bei gleichnamigen Beobachtungen zu einer Culmination, und bei den gleichnamigen Culminationen an mehreren Tagen liegt nämlich nahe dasselbe Ablesungsresultat zu Grunde, und obgleich, bei der Ablesung durch Verniers, fast immer andere Theilstriche sprechend werden, deren unregelmässige Theilungsfehler also bei unserem Verfahren in dem mittleren Fehler einer Beobachtung 0,981″ mit eingeschlossen sind, so ist doch natürlich, dass in den verschiedenen Gegenden des Limbus gewisse ungleiche Durchschnittsfehler vorherrschen müssen. Jedenfalls sind aber dieselben sehr klein. Im Jahre 1826 habe ich mit vier vortrefflichen Mikroskopen von *Repsold* 30 Theilstriche von 12 zu 12 Grad mit äusserster Sorgfalt geprüft, wobei jeder Theilstrich fast 200 mal, in abgeänderten Combinationen, eingestellt wurde. Das Resultat ist, dass das Mittel der Fehler von zwei diametral entgegengesetzten Theilstrichen, A und A + 180°, soweit noch einige Regelmässigkeit zu erkennen ist, durch die Formel

$$-1{,}23'' \cos(2A - 28^\circ\ 28') - 0{,}22'' \cos(4A - 47^\circ\ 56')$$

möglichst nahe dargestellt wird, dass die dann übrig bleibenden Fehler als regellos erscheinen, und die Quadratwurzel aus dem Mittel ihrer Quadrate = 0,32″ wird. Ich hatte mir vorgesetzt, diese Prüfung auf die doppelte Anzahl der Theilstriche auszudehnen; allein bei der Geringfügigkeit der sich ergebenden Resultate scheint diese Untersuchung den grossen dazu erforderlichen Zeitaufwand nicht zu verdienen. Es bedarf keiner Erinnerung, dass der erste Theil des regelmässigen Fehlers $-1{,}23'' \cos(2A - 28^\circ\ 28')$ von selbst wegfällt, wenn, wie bei obigen Beobachtungen immer geschehen ist, alle vier Verniers abgelesen werden. Er enthält hingegen eine reelle Verbesserung, falls man die Theilung nur an zwei gegenüberliegenden Stellen abliest, wie ich gegenwärtig immer thue, seitdem ich mich mit bedeutendem Gewinn für die Feinheit der Ablesung, statt der Verniers zweier *Repsold*'scher Mikroskope bediene.

17.

Zieht man vor, $g = 0$ vorauszusetzen, so fällt die Polhöhe um 0,07″ kleiner aus, und das Gewicht dieser Bestimmung wird = 84,1. Anderweitige, an einem anderen Orte anzuführende Beobachtungen scheinen übrigens den obigen Werth von g, dem Zeichen und auch sehr nahe der Grösse nach, zu bestätigen, reichen

aber noch nicht hin, über einen so delicaten Gegenstand zu entscheiden.

Den Coefficienten f kann man aus vorliegenden Beobachtungen nicht bestimmen, ohne die Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers während der Beobachtungen von 1824 vorauszusetzen. Erlaubt man sich diese Voraussetzung, so hat man 28 Gleichungen, deren gehörige Behandlung

$$\varphi = 51^\circ\ 31'\ 47{,}89'' \text{ mit dem Gewicht } 60{,}9$$
$$f = +0{,}76$$
$$g = +0{,}23$$

giebt. Da man gegenwärtig, durch Einstellen des Fernrohrs auf den Nadirpunkt, den Collimationsfehler jede Stunde mit bewundernswürdiger Genauigkeit ohne Umlegen bestimmen kann*), so behalte ich mir weitere Prüfung dieses Gegenstandes vor.

18.

Mit Vorbehalt der durch künftige weitere Untersuchungen noch auszumittelnden Correction, die wohl schwerlich eine halbe Secunde erreichen kann, setze ich daher die Polhöhe

in Göttingen

für den Platz des Wassergefässes bei den Nordsternbeobachtungen . . . . . . 51° 31′ 47,90″

für den Platz des *Reichenbach*'schen Meridiankreises 47,85

für den Platz des Zenithsectors 47,92

(welche letztere zur Reduktion der Declinationen der Zenithalsterne zu Grunde gelegt ist)

in Altona

für den Platz des Zenithsectors . . . . 53° 32′ 44,42″

für den Platz des Meridiankreises . . . 45,27.

19.

Nach der trigonometrischen Verbindung der Sternwarten von Göttingen und Altona liegt letztere

115163,725 Toisen nördlich
7,211 Toisen westlich

*) Ich bediene mich dieses unschätzbaren Mittels, dessen Ausführbarkeit *Bohnenberger* zuerst gezeigt hat, seit zwei Jahren beständig.

von jener. Diese Zahlen beziehen sich auf die Plätze der Meridiankreise; sie gründen sich auf den Werth der Dreiecksseite Hamburg —Hohenhorn 13841,815 Toisen, und diese auf die von Herrn Prof. *Schumacher* in Holstein im Jahre 1820 gemessene Basis. Da jedoch die Vergleichung der dabei gebrauchten Messstangen mit der Normaltoise noch nicht definitiv vollendet ist, so wird obige Entfernung in Zukunft noch in demselben Verhältniss abzuändern sein, wie die Basis selbst, welche Veränderung aber jedenfalls nur sehr gering sein kann. Der mittlere Breitengrad zwischen beiden Sternwarten ergiebt sich danach

$$= 57127{,}2 \text{ Toisen},$$

merklich grösser, als man nach den mittleren Werthen der in Frankreich und England gemessenen Grade hätte erwarten sollen.

20.

Die hannoversche Gradmessung liefert also einen neuen Beitrag zur Bestätigung der nicht mehr zu bezweifelnden Wahrheit, dass die Oberfläche der Erde keine ganz regelmässige Gestalt hat. Von dieser Unregelmässigkeit haben bereits die Anomalien bei den Theilen der französischen und der englischen Gradmessung Beweise gegeben, noch stärkere die Anomalien bei den Polhöhen mehrerer Oerter in Italien. Bei der hannoverschen Gradmessung findet sich ausser der Anomalie zwischen Göttingen und Altona eine noch beträchtlich stärkere bei einem zwischenliegenden Dreieckspunkte, dem Brocken. Wenn man meine Dreiecke als auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids liegend, dessen Dimensionen die von *Walbeck* aus der Gesammtheit der bisherigen Gradmessungen abgeleiteten sind, und welches nach unserer besten gegenwärtigen Kenntniss sich am vollkommensten an die wirkliche Gestalt im Ganzen anschliesst (Abplattung $\frac{1}{302{,}78}$, der dreihundertsechzigste Theil des Erdmeridians $= 57009{,}758$ Toisen), berechnet, und dabei von der Polhöhe von Göttingen $= 51^\circ\ 31'\ 47{,}85''$ ausgeht, so findet sich die Breite

$$\begin{array}{ll} \text{des Brockens} & = 51^\circ\ 48'\ \ 1{,}85'' \\ \text{von Altona} & = 53\ \ \ 32\ \ 50{,}79\,. \end{array}$$

Während nun die astronomischen Beobachtungen die Polhöhe von Altona 5,52″ kleiner gegeben haben, geben die von Herrn *von Zach* auf dem Brocken angestellten Beobachtungen die Polhöhe

dieses Punktes 10″ bis 11″ *grösser**), ein Unterschied, von dem doch jedenfalls nur ein kleiner Theil dem Instrumente und den in der Rechnung gebrauchten Declinationen zur Last fallen kann. Die Vergleichung des Breitenunterschiedes zwischen Altona und dem Brocken mit der Krümmung, welche dem sich der Erde im Ganzen am besten anschliessenden Sphäroid entspricht, würde daher eine Abweichung von 16″ geben.

Nach unserem Dafürhalten betrachtet man diesen Gegenstand aus einem falschen Gesichtspunkte, wenn man bei solchen Erscheinungen immer nur von Localablenkungen der Lothlinie spricht, und sie also gleichsam nur als einzelne Ausnahmen ansieht. Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeeres einen Theil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Theils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt, und an der äusseren Rinde der Erde, von der allein wir etwas wissen, zeigt sich diese Gestalt und Dichtigkeit als höchst unregelmässig; die Unregelmässigkeit der Dichtigkeit mag sich leicht noch ziemlich tief unter die äussere Rinde erstrecken, und entzieht sich ganz unseren Berechnungen, zu welchen fast alle Data fehlen. Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesammtwirkung dieser ungleich vertheilten Elemente, und anstatt vorkommende unzweideutige Beweise der Unregelmässigkeit befremdend zu finden, scheint es eher zu bewundern, dass sie nicht noch grösser ist. Wären die astronomischen Beobachtungen einer zehn- oder hundertmal grösseren Genauigkeit fähig, als sie gegenwärtig haben, so würden sie diese Unregelmässigkeit ohne Zweifel überall nachweisen.

Bei dieser Lage der Sache hindert aber noch nichts, die Erde im Ganzen als ein Revolutionssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche (geometrische) Oberfläche überall bald in stärkeren, bald in schwächeren, bald in kürzeren, bald in längeren Undulationen abweicht. Wäre es möglich, die ganze Erde mit *einem* trigonometrischen Netze gleichsam zu umspinnen, und die gegenseitige Lage aller Punkte dadurch zu berechnen, so würde das idealische

---

*) *Monatl. Corresp.* B. X, S. 203. An einem Platze, der etwa 0,5″ südlicher liegt, als der Dreieckspunkt, fand dieser geschickte Beobachter aus 188 Beobachtungen von α Aquilae 51° 48′ 12,12″. Aus Sonnenbeobachtungen fand er 51° 48′ 11,17″.

Revolutionssphäroid dasjenige sein, auf welchem berechnet die Richtungen der Verticalen die möglich beste Uebereinstimmung mit den astronomischen Beobachtungen gäben. Wenn man gleich von diesem unerreichbaren Ideale immer weit entfernt bleiben wird, so leidet es doch keinen Zweifel, dass die künftigen Jahrhunderte die mathematische Kenntniss der Erdfigur sehr viel werden weiter bringen können. Die Vervielfältigung der Gradmessungen ist aber eigentlich nur der Anfang dazu, woraus nur einzelne Resultate für eine kleine Anzahl in isolirten Linien liegender Punkte hervorgehen; wie viel ergiebiger wird aber die Ausbeute sein, wenn diejenigen trigonometrischen Operationen, welche mit ausgesuchten Hülfsmitteln in verschiedenen Ländern ausgeführt sind, in Verknüpfung kommen und sich zu *einem* grossen System abrunden. Vielleicht ist die Aussicht nicht chimärisch, dass einst alle Sternwarten von Europa trigonometrisch unter einander verbunden sein werden, da schon jetzt solche Verbindungen von Schottland bis zum adriatischen Meere und von Formentera bis Fühnen vorhanden, wenngleich bisher nur theilweise öffentlich bekannt gemacht sind. Möchte nur dieser letzte Umstand mehr als bisher geschehen, beachtet, und kostbare Materialien, die der wissenschaftlichen Welt angehören sollten, dieser nicht entzogen, oder gar der Gefahr des Unterganges preisgegeben werden!

21.

Ein nicht uninteressantes Resultat giebt noch die Vergleichung der aus den Sectorbeobachtungen hervorgegangenen Sterndeclinationen mit älteren Bestimmungen, wo solche vorhanden sind. Von unseren 43 Sternen finden sich 27 in *Piazzi*'s und 13 in *Bessel*'s *Bradley*'schem Catalog. Hier folgt die Vergleichung unserer Bestimmungen (1827), mit den *Bradley*'schen (1755) und *Piazzi*'schen (1800), nach *Bessel*'s neuer Bestimmung der Präcession reducirt; positive Zeichen bedeuten eine nördlichere Stellung aus unserer Bestimmung.

	Bezeichnung.	Bradley.	Piazzi.		Bezeichnung.	Bradley.	Piazzi.
1	24 Canum	+ 0,2″	+ 1,1″	17	P. 15. 39	—	— 0,7″
2	83 Ursae	— 1,5	— 2,0	25	Θ Draconis	+23,5″	+ 8,6
3	η Ursae	— 2,4	— 2,3	27	P. 16. 33	—	— 2,6
4	86 Ursae	— 5,4	— 0,8	28	P. 16. 56	—	— 2,6
6	P. 13. 289	—	— 1,3	32	16 Draconis	+ 1,2	— 3,7
7	13 Bootis	+ 1,4	+ 2,4	36	P. 16. 253	—	— 2,1
8	ϰ Bootis sq.	− 2,9	— 2,2	37	P. 16. 291	—	+10,3
9	P. 14. 56	—	— 0,4	38	P. 16. 310	—	— 4,9
10	Θ Bootis	—30,6	—10,8	39	P. 17. 20	—	— 3,0
11	P. 14. 131	—	+ 7,4	40	P. 17. 38	—	— 2,9
12	P. 14. 164	—	+ 0,1	41	74 Herculis	+ 1,7	+ 0,7
13	39 Bootis med.	+ 4,8	+ 2,7	42	P. 17. 120	—	— 2,1
14	P. 14. 235	—	— 5,0	43	β Draconis	— 0,5	— 1,5
15	44 Bootis med.	+ 1,9	+ 1,1				

IV. Breitenbestimmung der Sternwarte Seeberg.

Gleichzeitig mit meinen Beobachtungen in Göttingen und Altona wurden dieselben Sterne auf meine Aufforderung auch von Herrn *Hansen*, Director der Sternwarte Seeberg bei Gotha, an dem dortigen *Ertel*'schen zweifüssigen Meridiankreise beobachtet. Der sich daraus ergebende Breitenunterschied zwischen dieser und der Göttinger Sternwarte erhält ein noch erhöhtes Interesse durch den Umstand, dass erstere vermittelst einiger unter Leitung des Herrn Generallieutenants *von Müffling* gemessener Dreiecke mit dem hannoverschen Dreieckssystem verbunden ist.

Der Kreis wurde während der Beobachtungen einigemal umgelegt, allein die Bestimmung des Collimationsfehlers wurde unabhängig davon jeden Tag, und meistens jeden Tag zweimal, durch Einstellung auf den Nadirpunkt gemacht, welches schon oben erwähnte Verfahren Herr *Hansen* im Herbst 1826 auf hiesiger Sternwarte praktisch kennen gelernt hatte. Die Ablesung geschah nicht mit Verniers, sondern mit Mikroskopen. Folgende Uebersicht enthält die Hauptresultate dieser Beobachtungen, indem die erste Columne die Bezeichnung des Sterns, die zweite die Lage des Kreises, die dritte die Anzahl der Beobachtungen, die vierte die von mir auf den Anfang des Jahres 1827 reducirte Zenithdistanz

(nördliche mit positiven Zeichen), die fünfte die Breite, welche aus den oben, S. 155/156, mitgetheilten Declinationen sich ergiebt, darstellt:

1	Ost	5	−1° 1′ 53,14″	50° 56′ 4,76″	16	Ost	5	−1° 42′ 19,87″	50° 56′ 6,55″
	West	4	52,80	4,42		West	5	17,05	3,73
2	Ost	5	+4 37 29,41	5,57	17	Ost	5	+0 38 48,22	5,50
	West	6	30,86	4,12		West	5	48,79	4,93
3	Ost	5	−0 45 19,00	5,20	18	Ost	5	+1 38 59,63	6,24
	West	7	17,70	3,90		West	6	61,51	4,36
4	Ost	6	+3 38 50,38	5,17	19	West	2	+3 41 30,38	4,49
	West	6	51,05	4,50	20	Ost	1	+3 33 50,19	4,11
5	Ost	6	+4 29 54,35	4,87		West	1	47,87	6,43
	West	6	54,30	4,92	21	Ost	1	+1 58 31,74	5,35
6	Ost	6	−4 20 26,87	6,01		West	1	32,90	4,19
	West	4	25,92	5,06	22	Ost	1	−4 39 61,37	6,07
7	Ost	6	−0 39 22,12	5,56		West	1	58,90	3,60
	West	4	20,70	4,14	23	Ost	1	+5 24 21,09	5,91
8	Ost	5	+1 40 1,41	6,06		West	1	22,88	4,12
	West	4	3,24	4,23	24	West	1	−0 33 26,54	5,95
9	Ost	5	+5 17 29,69	6,82	25	West	1	+8 5 40,64	6,50
	West	4	33,72	2,79	26	West	1	−0 17 51,91	5,03
10	Ost	5	+1 43 6,51	5,54	27	West	1	−4 35 46,53	3,57
	West	5	8,63	3,42	28	West	1	+2 44 9,48	3,93
11	Ost	5	+2 43 27,76	5,26	29	West	1	+1 31 5,78	5,28
	West	4	28,89	4,13	30	West	2	+4 40 0,22	4,51
12	Ost	5	+2 2 48,89	6,77	31	West	1	−4 57 58,28	4,13
	West	3	50,29	5,37	32	West	1	+2 18 59,76	3,88
13	Ost	5	−1 29 56,73	6,19	33	West	1	−0 39 51,61	5,28
	West	5	56,64	6,10	34	West	1	+6 9 34,85	2,94
14	Ost	5	−0 35 42,51	5,00	35	West	1	−3 59 15,56	4,09
	West	3	42,84	5,33	36	West	2	−4 6 42,83	4,84
15	Ost	5	−2 36 14,46	6,93	37	West	1	+6 0 36,97	5,38
	West	4	12,88	5,35	38	West	1	−1 53 16,75	3,84

Diese sechzig Resultate für die Breite haben nun freilich ungleiche Zuverlässigkeit; allein um die ihnen beizulegenden Gewichte ohne Willkür angeben zu können, müsste das Verhältniss des mittleren eigentlichen Beobachtungsfehlers zum mittleren Theilungsfehler bekannt sein; ist dies Verhältniss wie 1 zu $\sqrt{\Theta}$, so wird, wenn man die geringe den Declinationen noch anhängende Unsicherheit nicht beachtet,

$$\frac{n}{1 + n\Theta}$$

das Gewicht einer auf n Beobachtungen, die sich auf einerlei Theilstrich beziehen, beruhenden Bestimmung sein.

Nimmt man statt dieses Gewichts schlechthin n an, so wird das Mittel aus den 206 Beobachtungen

$$= 50^\circ\ 56'\ 5{,}16''.$$

Inzwischen lassen die Beobachtungen erkennen, dass die Theilungsfehler vergleichungsweise beträchtlich grösser sein müssen, als an dem *Ramsden*'schen Zenithsector, während die eigentlichen Beobachtungsfehler eher noch etwas kleiner sein mögen. Bei jenem Verfahren werden also die auf einer grösseren Anzahl von Beobachtungen beruhenden Bestimmungen vor denen, welchen nur eine oder zwei zu Grunde liegen, viel zu sehr bevorzugt.

Sobald man aber den Einfluss der Theilungsfehler berücksichtigen will, darf auch nicht unbeachtet bleiben, dass die jedesmalige Bestimmung des Collimationsfehlers einen constanten von den Fehlern der dabei sprechenden Theilstriche abhängenden Theil involvirt. Es ist aber klar, dass derselbe auf die Polhöhe in entgegengesetztem Sinn wirkt, jenachdem der Kreis östlich oder westlich sich befindet. Man wird daher die auf die verschiedenen Lagen des Kreises sich beziehenden Beobachtungen von einander trennen, aus jeder Reihe, mit Anwendung des Gewichts $\frac{n}{1 + n\Theta}$ für jede Bestimmung, das Mittel berechnen, und zuletzt aus diesen beiden Mitteln das einfache arithmetische Mittel nehmen müssen.

In Ermangelung einer bestimmten Kenntniss von Θ, ist diese Rechnung in den drei Hypothesen $\Theta = 0$, $\Theta = 1$, $\Theta = \infty$ geführt, woraus sich für die Polhöhe ergeben hat:

	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = \infty$
Kreis Ost	50° 56′ 5,75″	50° 56′ 5,69″	50° 56′ 5,71″
Kreis West	4,62	4,65	4,65
Polhöhe	50° 56′ 5,18″	50° 56′ 5,17″	50° 56′ 5,18″

Man sieht also, dass die Berücksichtigung der strengeren Grundsätze das erste Resultat gar nicht merklich ändert, und dass man sich an die Zahl 50° 56′ 5,17″ halten kann.

Bei diesen Rechnungen ist auf die Biegung des Fernrohrs noch keine Rücksicht genommen. Nach Herrn *Hansen*'s Angabe ist dieselbe im Horizont = 1,00″, und zwar von der beobachteten Zenithdistanz abzuziehen, oder nach unserer Bezeichnung $f = -1{,}00''$.

Man sieht, dass bei Berücksichtigung dieser Biegung die Polhöhe aus den nördlich vom Zenith culminirenden Sternen etwas grösser, aus den südlichen kleiner ausfallen, und, weil jene etwas überwiegen, das Mittelresultat um 0,02″ vergrössert werden wird. Der zweite Theil der Biegung, oder die Biegung bei verticaler Stellung, kann, da alle hier vorkommenden Zenithdistanzen nur klein sind, als eine constante Veränderung des Collimationsfehlers betrachtet werden, und wird also bei unserem Verfahren gerade ebenso, wie die Theilungsfehler der bei der Bestimmung von jenem sprechenden Theilstriche, von selbst eliminirt.

Wir haben demnach als Definitivwerth für die Polhöhe aus diesen Beobachtungen

$$50^\circ\ 56'\ 5{,}19''.$$

Die erwähnte trigonometrische Verbindung der beiden Sternwarten, nach den oben angeführten Dimensionen des Erdsphäroids berechnet, giebt den Breitenunterschied

$$35'\ 41{,}86'',$$

also mit der oben bestimmten Polhöhe von Göttingen, die der Seeberger Sternwarte

$$= 50^\circ\ 56'\ 5{,}99''.$$

Diese bezieht sich auf den Dreieckspunkt, nämlich das Centrum der Axe des Mittagsfernrohrs; das Centrum der Axe des Meridiankreises liegt 1,168 Toisen, oder im Bogen 0,07″ südlicher; die Polhöhe des letzteren Punktes ist also, aus Göttingen durch die trigonometrische Verbindung abgeleitet,

$$= 50^\circ\ 56'\ 5{,}92''$$

oder 0,73″ grösser, als aus den astronomischen Beobachtungen.

Für den Längenunterschied folgt übrigens aus der trigonometrischen Verbindung 47′ 9,20″ im Bogen, oder $3^m\ 8{,}61^s$ in Zeit, sehr gut mit unserer Kenntniss aus astronomischen Beobachtungen übereinstimmend. Endlich folgt aus jenen Messungen das Azimuth der Dreiecksseite Seeberg—südliches Meridianzeichen bei Schwabhausen 4,6″ westlich, welches gleichfalls bei der nicht unbeträchtlichen Anzahl der Zwischenpunkte, den Verschiedenheiten, die in den Angaben einiger Winkel der preussischen Messung vorkommen, und der Ungewissheit, ob der Dreieckspunkt sich genau im Meridian befand, wie eine gute Uebereinstimmung betrachtet werden kann.

Zusatz zu Artikel 20., S. 180.

Walbeck's Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids befindet sich in einer kleinen Abhandlung: *De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis,* wovon aber nur die zwei ersten Bogen im Druck erschienen sind (Abo, 1819). *Walbeck* hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung dem Calcül unterworfen, und ist meines Wissens bisher der einzige, der dieses Geschäft nach richtigen willkürfreien Grundsätzen ausgeführt hat. Inzwischen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den Endpunkten beobachteten Polhöhen, in Betracht gezogen, ohne die bei mehreren vorhandenen Zwischenpunkte zu berücksichtigen, und in der Rechnung ist er bei der ersten Potenz der Abplattung stehen geblieben.

Ich habe deshalb den durch mehrere Arbeiten bereits vortheilhaft bekannten Herrn Dr. *Schmidt* unlängst zu einer neuen Berechnung dieser sämmtlichen Gradmessungen veranlasst, welche er während des Abdrucks der letzten Bogen gegenwärtiger Schrift vollendet hat. Er hat dabei sowohl die höheren Potenzen der Abplattung, als die an allen Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mit berücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung hinzugezogen, und, nach dem oben, S. 181, angedeuteten Princip, dasjenige Ellipsoid bestimmt, auf welchem die astronomisch beobachteten Polhöhen, um mit den geodätischen Messungen in vollkommene Uebereinstimmung zu kommen, der möglich geringsten Abänderung bedürfen, d. i. wo die Summe der Quadrate der hierzu erforderlichen Abänderungen ein Minimum wird. Das Resultat dieser Rechnung ist:

Abplattung . . . . $\frac{1}{298,39}$

Dreihundertsechzigster Theil des Erdmeridians . 57010,35 Toisen.

Die beobachteten Polhöhen an den 25 Punkten der sieben Gradmessungen, und ihre kleinsten zur vollkommenen Uebereinstimmung mit den gefundenen Erddimensionen erforderlichen Abänderungen stellt folgende Uebersicht dar:

Peruanische Messung.

Tarqui	— 3° 4′ 30,83″	+ 2,05″
Cotchesqui . . .	+ 0 2 37,82	— 2,05

Erste ostindische Messung.

Trivandeporum .	+ 11°	44′	52,59″	— 0,48″
Paudree	13	19	49,02	+ 0,47

Zweite ostindische Messung.

Punnae	8	9	38,39	— 1,43
Putchapolliam .	10	59	48,93	— 1,18
Dodagoontah . .	12	59	59,91	+ 3,37
Namthabad . .	15	6	0,64	— 0,77

Französische Messung.

Formentera . .	38	39	56,11	+ 3,95
Montjouy . . .	41	21	45,45	+ 2,81
Barcellona . . .	41	22	47,16	+ 1,07
Perpignan . . .	42	41	58,01	— 3,67
Carcassonne . .	43	12	54,31	— 0,96
Evaux	46	10	42,19	— 6,14
Pantheon . . .	48	50	48,94	— 0,17
Dünkirchen . .	51	2	8,74	+ 3,12

Englische Messung.

Dunnose	50	37	7,81	— 1,73
Greenwich . . .	51	28	39,60	+ 1,00
Blenheim . . .	51	50	27,50	+ 3,02
Arburyhill . . .	52	13	27,79	+ 1,80
Clifton	53	27	31,59	— 4,07

Hannoversche Messung.

Göttingen . . .	51	31	47,85	— 2,65
Altona	53	32	45,27	+ 2,66

Schwedische Messung.

Mallörn	65	31	31,06	+ 1,40
Pahtavara . . .	67	8	51,41	— 1,40.

Die Zahlen der letzten Columne sind nun keineswegs wie Fehler der astronomischen Beobachtungen zu betrachten, sondern sie sind die algebraische Summe dieser Fehler und der Unregelmässigkeiten der Richtung der Verticale. Wenn man diese Ge-

sammtabweichungen nach denselben Regeln, wie die zufälligen Fehler, behandelt, so findet sich die mittlere Abweichung 3,18″, und damit der mittlere zu befürchtende Fehler

in dem Nenner der Abplattung . . . . 12,5 Einheiten
in dem Werthe des dreihundertsechzigsten
Theiles des Erdmeridians . . . . 5,0 Toisen.

Den sogenannten wahrscheinlichen Fehler mag man also auf 8 Einheiten bei dem Nenner der Abplattung, und auf 3 Toisen bei dem mittleren Breitengrade schätzen, und diese Fixirung unserer Begriffe über den Grad der Genauigkeit, welchen man der Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids durch alle bisherigen Breitengradmessungen zuzuschreiben berechtigt ist, hat man als ein wichtiges Resultat dieser verdienstlichen an einem anderen Orte ausführlich bekannt zu machenden Arbeit des Herrn Dr. *Schmidt* anzusehen.

VIII.

Anzeigen.

1.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1821, Februar 26.)

Am 15. Februar wurde der Königl. Societät vom Herrn Hofrath *Gauss* eine Vorlesung übergeben, überschrieben

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior,

die eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande hat. Alle Beobachtungen, die sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, können, mit welcher Genauigkeit und mit wie vortrefflichen Werkzeugen sie auch angestellt werden, nie *absolute* Genauigkeit haben; sie bleiben immer nur Näherungen, grösseren oder kleineren Fehlern ausgesetzt. Nicht von solchen Fehlern ist hier die Rede, deren Quellen genau bekannt sind, und deren Grösse bei bestimmten Beobachtungen jedesmal berechnet werden kann; denn da dergleichen Fehler bei den beobachteten Grössen in Abzug gebracht werden können und sollen, so ist es dasselbe, als ob sie gar nicht da wären. Ganz anders verhält es sich dagegen mit den als zufällig zu betrachtenden Fehlern, die aus der beschränkten Schärfe der Sinne, aus mancherlei unvermeidlichen und keiner Regel folgenden Unvollkommenheiten der Instrumente, und aus mancherlei regellos (wenigstens für uns) wirkenden Störungen durch äussere Umstände (z. B. das Wallen der Atmosphäre beim Sehen, Mangel absoluter Festigkeit beim Aufstellen der Instrumente) herrühren. Diese zufälligen Fehler, die dem Calcül nicht unterworfen werden können, lassen sich nicht *wegschaffen*, und der Beobachter kann sie durch sorgfältige Aufmerksamkeit und durch Vervielfältigung der Beobachtungen nur

vermindern: allein nachdem der Beobachter das seinige gethan hat, ist es an dem Geometer, die Unsicherheit der Beobachtungen und der durch Rechnung daraus abgeleiteten Grössen nach streng mathematischen Principien zu würdigen, und was das wichtigste ist, da, wo die mit den Beobachtungen zusammenhängenden Grössen aus denselben durch verschiedene Combinationen abgeleitet werden können, diejenige Art vorzuschreiben, wobei so wenig Unsicherheit als möglich zu befürchten bleibt.

Obgleich die zufälligen Fehler als solche keinem Gesetze folgen, sondern ohne Ordnung in einer Beobachtung grösser, in einer anderen kleiner ausfallen, so ist doch gewiss, dass bei einer bestimmten Beobachtungsart, auch die Individualität des Beobachters und seiner Werkzeuge als bestimmt betrachtet, die aus jeder einfachen Fehlerquelle fliessenden Fehler nicht bloss in gewissen Grenzen eingeschlossen sind, sondern dass auch alle möglichen Fehler zwischen diesen Grenzen ihre bestimmte relative Wahrscheinlichkeit haben, der zu Folge sie nach Maassgabe ihrer Grösse häufiger oder seltener zu erwarten sind, und derjenige, der eine genaue und vollständige Einsicht in die Beschaffenheit einer solchen Fehlerquelle hätte, würde diese Grenzen und den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler und ihrer Grösse zu bestimmen im Stande sein, auf eine ähnliche Weise, wie sich bei Glücksspielen, so bald man ihre Regeln kennt, die Grenzen der möglichen Gewinne und Verluste, und deren relative Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Dasselbe gilt auch von dem aus dem Zusammenwirken der einfachen Fehlerquellen entspringenden Totalfehler. Auch sind diese Begriffe nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränkt, sondern auch auf mittelbare aus Beobachtungen abgeleitete Grössenbestimmungen anwendbar. In der Wirklichkeit werden uns freilich fast allemal die Mittel fehlen, das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der Fehler *a priori* anzugeben.

Wie wir die Unzulässigkeit einer bestimmten Art von Beobachtungen im allgemeinen abschätzen wollen, hängt zum Theil von unserer Willkür ab. Man kann dabei entweder bloss die Grösse der äussersten möglichen Fehler zum Maassstabe wählen, oder zugleich auf die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Fehler mit Rücksicht nehmen. Das letztere scheint angemessener zu sein. Allein diese Berücksichtigung kann auf vielfache Weise geschehen. Man kann, wie es die Berechner bisher gemacht haben, den sogenannten wahrscheinlichen (nicht wahr-

schein*lichsten*) Fehler zum Maassstabe wählen, welches derjenige ist, über welchen hinaus alle möglichen Fehler zusammen noch eben so viele Wahrscheinlichkeit haben, wie alle diesseits liegenden zusammen; allein es wird *weit vortheilhafter* sein, zu diesem Zweck statt des wahrscheinlichen Fehlers den *mittleren* zu gebrauchen, vorausgesetzt, dass man diesen an sich noch schwankenden Begriff auf die rechte Art bestimmt. Man lege jedem Fehler ein von seiner Grösse abhängendes Moment bei, multiplicire das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addire die Produkte: der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer betrachtet werden müssen. Allein welche Funktion der Grösse des Fehlers wir für dessen Moment wählen wollen, bleibt wieder unserer *Willkür* überlassen, wenn nur der Werth derselben immer positiv ist, und für grössere Fehler grösser als für kleinere. Der Verf. hat die einfachste Funktion dieser Art gewählt, nämlich das Quadrat; diese Wahl ist aber noch mit manchen anderen höchst wesentlichen Vortheilen verknüpft, die bei keiner anderen stattfinden. Denn sonst könnte auch jede andere Potenz mit geraden Exponenten gebraucht werden, und je grösser dieser Exponent gewählt würde, desto näher würde man dem Princip kommen, wo bloss die äussersten Fehler zum Maassstabe der Genauigkeit dienen. Gegen die Art, wie ein grosser Geometer den Begriff des mittleren Fehlers genommen hat, indem er die Momente der Fehler diesen gleich setzt, wenn sie positiv sind, und die ihnen entgegengesetzten Grössen dafür gebraucht, wenn sie negativ sind, lässt sich bemerken, dass dabei gegen die mathematische Continuität angestossen wird, dass sie so gut wie jede andere auch willkürlich gewählt ist, dass die Resultate viel weniger einfach und genugthuend ausfallen, und dass es auch an sich schon natürlicher scheint, das Moment der Fehler in einem stärkeren Verhältniss, wie diese selbst, wachsen zu lassen, indem man sich gewiss lieber den einfachen Fehler zweimal, als den doppelten einmal gefallen lässt.

Diese Erläuterungen mussten vorangeschickt werden, wenn auch nur etwas von dem Inhalt der Untersuchung hier angeführt werden sollte, wovon die gegenwärtige Abhandlung die erste Abtheilung ausmacht.

Wenn die Grössen, deren Werthe durch Beobachtungen gefunden sind, mit einer gleichen Anzahl unbekannter Grössen auf eine bekannte Art zusammenhängen, so lassen sich, allgemein zu

reden, die Werthe der unbekannten Grössen aus den Beobachtungen durch Rechnung ableiten. Freilich werden jene Werthe auch nur näherungsweise richtig sein, insofern die Beobachtungen es waren: allein die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nichts dabei zu thun, als die Unsicherheit jener Bestimmungen zu würdigen, indem sie die der Beobachtungen voraussetzt. Ist die Anzahl der unbekannten Grössen grösser als die der Beobachtungen, so lassen sich jene aus diesen noch gar nicht bestimmen. Allein wenn die Anzahl der unbekannten Grössen kleiner ist, als die der Beobachtungen, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt: es sind dann unendlich viele Combinationen möglich, um aus den Beobachtungen die unbekannten Grössen abzuleiten, die freilich alle zu einerlei Resultaten führen müssten, wenn die Beobachtungen absolute Genauigkeit hätten, aber unter den obwaltenden Umständen mehr oder weniger von einander abweichende Resultate hervorbringen. Aus dieser ins Unendliche gehenden Mannigfaltigkeit von Combinationen die zweckmässigste auszuwählen, d. i. diejenige, wobei die Unsicherheit der Resultate die möglich kleinste wird, ist unstreitig eine der wichtigsten Aufgaben bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften.

Der Verfasser gegenwärtiger Abhandlung, welcher im Jahre 1797 diese Aufgabe nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst untersuchte, fand bald, dass die Ausmittelung der *wahrscheinlichsten* Werthe der unbekannten Grössen unmöglich sei, wenn nicht die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, bekannt ist. Insofern sie dies aber nicht ist, bleibt nichts übrig, als hypothetisch eine solche Funktion anzunehmen. Es schien ihm das natürlichste, zuerst den umgekehrten Weg einzuschlagen und die Funktion zu suchen, die zu Grunde gelegt werden muss, wenn eine allgemein als gut anerkannte Regel für den einfachsten aller Fälle daraus hervorgehen soll, die nämlich, dass das arithmetische Mittel aus mehreren für eine und dieselbe unbekannte Grösse durch Beobachtungen von gleicher Zuverlässigkeit gefundenen Werthen als der wahrscheinlichste betrachtet werden müsse. Es ergab sich daraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x einer Exponentialgrösse von der Form $e^{-h^2x^2}$ proportional angenommen werden müsse, und dass dann gerade diejenige Methode, auf die er schon einige Jahre zuvor durch andere Betrachtungen gekommen war, allgemein nothwendig werde. Diese

Methode, welche er nachher besonders seit 1801 bei allerlei astronomischen Rechnungen fast täglich anzuwenden Gelegenheit hatte, und auf welche auch *Legendre* inzwischen gekommen war, ist jetzt unter dem Namen Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen Gebrauch, und ihre Begründung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie die Bestimmung der Genauigkeit der Resultate selbst, nebst andern damit zusammenhängenden Untersuchungen sind in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* ausführlich entwickelt.

Der Marquis *de Laplace*, welcher nachher diesen Gegenstand aus einem neuen Gesichtspunkte betrachtete, indem er nicht die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen suchte, sondern die zweckmässigste Combination der Beobachtungen, fand das merkwürdige Resultat, dass, wenn die Anzahl der Beobachtungen als unendlich gross betrachtet wird, die Methode der kleinsten Quadrate allemal und unabhängig von der Funktion, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zweckmässigste Combination sei.

Man sieht hieraus, dass beide Begründungsarten noch etwas zu wünschen übrig lassen. Die erstere ist ganz von der hypothetischen Form für die Wahrscheinlichkeit der Fehler abhängig, und sobald man diese verwirft, sind wirklich die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe der unbekannten Grössen nicht mehr die wahrscheinlichsten, eben so wenig wie die arithmetischen Mittel in dem vorhin angeführten einfachsten aller Fälle. Die zweite Begründungsart lässt uns ganz im Dunkeln, was bei einer mässigen Anzahl von Beobachtungen zu thun sei. Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann nicht mehr den Rang eines von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Gesetzes, sondern empfiehlt sich nur durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen.

Der Verfasser, welcher in gegenwärtiger Abhandlung diese Untersuchung aufs neue vorgenommen hat, indem er von einem ähnlichen Gesichtspunkte ausgeht, wie *de Laplace*, aber den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers auf eine andere, und wie ihm scheint, schon an und für sich natürlichere Art, feststellt, hofft, dass die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen werden, wie die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung allgemein als die zweckmässigste Combination

der Beobachtungen erscheint, nicht näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe, die Funktion für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sei, welche sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge gross oder klein sein.

Mit dem Hauptgegenstande ist eine Menge anderer merkwürdiger Untersuchungen enge verbunden, deren Umfang aber den Verfasser nöthigte, die Entwickelung des grössten Theils derselben einer künftigen zweiten Vorlesung vorzubehalten. Von denjenigen, die schon in der gegenwärtigen ersten Abtheilung vorkommen, sei es uns erlaubt, hier nur ein Resultat anzuführen. Wenn die Funktion, welche die relative Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers ausdrückt, unbekannt ist, so bleibt natürlich auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen gegebene Grenzen falle, unmöglich: dessenungeachtet muss, wenn nur allemal grössere Fehler geringere (wenigstens nicht grössere) Wahrscheinlichkeit haben als kleinere, die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, nothwendig grösser (wenigstens nicht kleiner) sein, als $\frac{x}{m}\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn x kleiner ist als $m\sqrt{\frac{3}{4}}$, und nicht kleiner als $1-\frac{4m^2}{9x^2}$, wenn x grösser ist als $m\sqrt{\frac{3}{4}}$, wobei m den bei den Beobachtungen zu befürchtenden mittleren Fehler bedeutet. Für $x = m\sqrt{\frac{3}{4}}$ fallen, wie man sieht, beide Ausdrücke zusammen.

2.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1823, Februar 24.)

Eine am 2. Febr. der Königl. Societät von Hrn. Hofr. *Gauss* überreichte Vorlesung, überschrieben:

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior,

steht im unmittelbaren Zusammenhange mit einer früheren, wovon in diesen Blättern (1821, Februar 26.) eine Anzeige gegeben ist. Wir bringen darüber nur kurz in Erinnerung, dass ihr Zweck war, die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate auf eine neue Art zu begründen, wobei diese Methode nicht näherungsweise, sondern

in mathematischer Schärfe, nicht mit der Beschränkung auf den Fall einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen, und nicht abhängig von einem hypothetischen Gesetze für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, sondern in vollkommener Allgemeinheit, als die zweckmässigste Combinationsart der Beobachtungen erscheint. Der gegenwärtige zweite Theil der Untersuchung enthält nun eine weitere Ausführung dieser Lehre in einer Reihe von Lehrsätzen und Problemen, die damit in genauester Verbindung stehen. Es würde der Einrichtung dieser Blätter nicht angemessen sein, diesen Untersuchungen hier Schritt für Schritt zu folgen, auch unnöthig, da die Abhandlung selbst bereits unter der Presse ist. Wir begnügen uns daher, nur die Gegenstände von einigen dieser Untersuchungen, die sich leichter isolirt herausheben lassen, hier anzuführen.

Die Werthe der unbekannten Grössen, welche der Methode der kleinsten Quadrate gemäss sind, und die man die *sichersten Werthe* nennen kann, werden vermittelst einer bestimmten Elimination gefunden, und die diesen Bestimmungen beizulegenden Gewichte vermittelst einer unbestimmten Elimination, wie dies schon aus der *Theoria Motus Corporum Coelestium* bekannt ist: auf eine neue Art wird hier *a priori* bewiesen, dass unter den obwaltenden Voraussetzungen diese Elimination allemal möglich ist. Zugleich wird eine merkwürdige Symmetrie unter den bei der unbestimmten Elimination hervorgehenden Coefficienten nachgewiesen.

So leicht und klar sich diese Eliminationsgeschäfte im allgemeinen übersehen lassen, so ist doch nicht zu leugnen, dass die wirkliche numerische Ausführung, bei einer beträchtlichen Anzahl von unbekannten Grössen, beschwerlich wird. Was die *bestimmte* Elimination, die zur Ausmittelung der sichersten Werthe für die unbekannten Grössen zureicht, betrifft, so hat der Verfasser ein Verfahren, wodurch die wirkliche Rechnung, so viel es nur die Natur der Sache verträgt, abgekürzt wird, bereits in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* angedeutet, und in einer im ersten Bande der *Commentt. Rec. Soc. R. Gott.* befindlichen Abhandlung, *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis,* ausführlich entwickelt. Dieses Verfahren gewährt zugleich den Vortheil, dass das Gewicht der Bestimmung der einen unbekannten Grösse, welche man bei dem Geschäft als die letzte betrachtet hat, sich von selbst mit ergiebt. Da nun die Ordnung unter den unbekannten Grössen gänz-

lich willkürlich ist, und man also welche man will, als die letzte behandeln kann, so ist dies Verfahren in allen Fällen zureichend, wo nur für *eine* der unbekannten Grössen das Gewicht mit verlangt wird, und die beschwerliche unbestimmte Elimination wird dann umgangen.

Die seitdem bei den rechnenden Astronomen so allgemein gewordene Gewohnheit, die Methode der kleinsten Quadrate auf schwierige astronomische Rechnungen anzuwenden, wie auf die vollständige Bestimmung von Cometenbahnen, wobei die Anzahl der unbekannten Grössen bis auf sechs steigt, hat indess das Bedürfniss, das Gewicht der sichersten Werthe *aller* unbekannten Grössen auf eine bequemere Art als durch die unbestimmte Elimination zu finden, fühlbar gemacht, und da die Bemühungen einiger Geometer*) keinen Erfolg gehabt hatten, so hat man sich nur so geholfen, dass man den oben erwähnten Algorithmus so viele male mit veränderter Ordnung der unbekannten Grössen durchführte, als unbekannte Grössen waren, indem man jeder einmal den letzten Platz anwies. Es scheint uns jedoch, dass durch dieses kunstlose Verfahren in Vergleichung mit der unbestimmten Elimination in Rücksicht auf Kürze der Rechnung nichts gewonnen wird. Der Verfasser hat daher diesen wichtigen Gegenstand einer besonderen Untersuchung unterworfen, und einen neuen Algorithmus zur Bestimmung der Gewichte der Werthe *sämmtlicher* unbekannten Grössen mitgetheilt, der alle Geschmeidigkeit und Kürze zu haben scheint, welcher die Sache ihrer Natur nach fähig ist.

Der sicherste Werth einer Grösse, welche eine gegebene Funktion der unbekannten Grössen der Aufgabe ist, wird gefunden, indem man für letztere ihre durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen sichersten Werthe substituirt. Allein eine bisher noch nicht behandelte Aufgabe ist es, wie das jener Bestimmung beizulegende Gewicht zu finden sei. Die hier gegebene Auflösung dieser Aufgabe verdient um so mehr von den rechnenden Astronomen beherzigt zu werden, da sich findet, dass mehrere derselben dabei früher auf eine nicht richtige Art zu Werke gegangen sind.

Die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den un-

---

*) z. B. *Plana*'s. Siehe *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, Band VI, S. 258.

mittelbar beobachteten Grössen, und denjenigen Werthen, welchen ihre Ausdrücke, als Funktionen der unbekannten Grössen, durch Substitution der sichersten Werthe für letztere erhalten (welche Quadrate, im Fall die Beobachtungen ungleiche Zuverlässigkeit haben, vor der Addition erst noch durch die respectiven Gewichte multiplicirt werden müssen) bildet bekanntlich ein absolutes Minimum. Sobald man daher einer der unbekannten Grössen einen Werth beilegt, der von dem sichersten verschieden ist, wird ein ähnliches Aggregat, wie man auch die übrigen unbekannten Grössen bestimmen mag, allezeit grösser ausfallen, als das erwähnte Minimum. Allein die übrigen unbekannten Grössen werden sich nur auf *eine* Art so bestimmen lassen, dass die Vergrösserung des Aggregates so klein wie möglich, oder dass das Aggregat selbst ein relatives Minimum werde. Diese von dem Verfasser hier ausgeführte Untersuchung führt zu einigen interessanten Wahrheiten, die über die ganze Lehre noch ein vielseitigeres Licht verbreiten.

Es fügt sich zuweilen, dass man erst, nachdem man schon eine ausgedehnte Rechnung über eine Reihe von Beobachtungen in allen Theilen durchgeführt hat, Kenntniss von einer neuen Beobachtung erhält, die man gern noch mit zugezogen hätte. Es kann in vielen Fällen erwünscht sein, wenn man nicht nöthig hat, deshalb die ganze Eliminationsarbeit von vorne wieder anzufangen, sondern im Stande ist, die durch das Hinzukommen der neuen Beobachtung entstehende Modification in den sichersten Werthen und deren Gewichten zu finden. Der Verfasser hat daher diese Aufgabe hier besonders abgehandelt, ebenso wie die verwandte, wo man einer schon angewandten Beobachtung hintennach ein anderes Gewicht, als ihr beigelegt war, zu ertheilen sich veranlasst sieht, und, ohne die Rechnung von vorne zu wiederholen, die Veränderungen der Endresultate zu erhalten wünscht.

Wie der *wahrscheinliche* Fehler einer Beobachtungsgattung (als bisher üblicher Maassstab ihrer Unsicherheit) aus einer hinlänglichen Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler näherungsweise zu finden sei, hatte der Verfasser in einer besonderen Abhandlung in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften (1816, März u. April) gezeigt: dieses Verfahren, sowie der Gebrauch des wahrscheinlichen Fehlers überhaupt, ist aber von der hypothetischen Form der Grösse der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler abhängig, und musste es sein. Im ersten Theile der gegen-

wärtigen Abhandlung ist nun zwar gezeigt, wie aus denselben Datis der mittlere Fehler der Beobachtungen (als zweckmässiger Maassstab ihrer Ungenauigkeit) näherungsweise gefunden wird. Allein immer bleibt hierbei die Bedenklichkeit übrig, dass man nach aller Schärfe selten oder fast nie im Besitz der Kenntniss der wahren Grösse von einer Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler sein kann. Bei der Ausübung hat man dafür bisher immer die Unterschiede zwischen dem, was die Beobachtungen ergeben haben, und den Resultaten der Rechnung nach den durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen sichersten Werthen der unbekannten Grössen, wovon die Beobachtungen abhängen, zu Grunde gelegt. Allein da man nicht berechtigt ist, die sichersten Werthe für die wahren Werthe selbst zu halten, so überzeugt man sich leicht, dass man durch dieses Verfahren allemal den wahrscheinlichen und mittleren Fehler *zu klein* finden muss, und daher den Beobachtungen und den daraus gezogenen Resultaten eine grössere Genauigkeit beilegt, als sie wirklich besitzen. Freilich hat in dem Falle, wo die Anzahl der Beobachtungen vielemale grösser ist als die der unbekannten Grössen, diese Unrichtigkeit wenig zu bedeuten; allein theils erfordert die Würde der Wissenschaft, dass man vollständig und bestimmt übersehe, wieviel man hierdurch zu fehlen Gefahr läuft, theils sind auch wirklich öfters nach jenem fehlerhaften Verfahren Rechnungsresultate in wichtigen Fällen aufgestellt, wo jene Voraussetzung nicht stattfand. Der Verfasser hat daher diesen Gegenstand einer besonderen Untersuchung unterworfen, die zu einem sehr merkwürdigen höchst einfachen Resultate geführt hat. Man braucht nämlich den nach dem angezeigten fehlerhaften Verfahren gefundenen mittleren Fehler, um ihn in den richtigen zu verwandeln, nur mit

$$\sqrt{\frac{\pi - \varrho}{\pi}}$$

zu multipliciren, wo π die Anzahl der Beobachtungen und ϱ die Anzahl der unbekannten Grössen bedeutet.

Die letzte Untersuchung betrifft noch die Ausmittelung des Grades von Genauigkeit, welcher dieser Bestimmung des mittleren Fehlers selbst beigelegt werden muss: die Resultate derselben müssen aber in der Abhandlung selbst nachgelesen werden.

3.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1826, September 25.)

Am 16. September überreichte der Herr Hofr. *Gauss* der Königl. Societät eine Vorlesung:

Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Bei allen früheren Arbeiten über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die zweckmässigste Benutzung der Beobachtungen, und namentlich auch in der Behandlung dieses Gegenstandes im fünften Bande der *Commentationes recentiores,* liegt in Beziehung auf die Form der Hauptaufgabe eine bestimmte Voraussetzung zu Grunde, die allerdings den meisten in der Ausübung vorkommenden Fällen angemessen ist. Diese Voraussetzung besteht darin, dass die beobachteten Grössen auf eine bekannte Art von gewissen unbekannten Grössen (Elementen) abhängen, d. i. bekannte Funktionen dieser Elemente sind. Die Anzahl dieser Elemente muss, damit die Aufgabe überhaupt hierher gehöre, kleiner sein, als die Anzahl der beobachteten Grössen, also diese selbst abhängig von einander.

Inzwischen sind doch auch die Fälle nicht selten, wo die gedachte Voraussetzung nicht unmittelbar stattfindet, d. i. wo die beobachteten Grössen noch nicht in der Form von bekannten Funktionen gewisser unbekannter Elemente gegeben sind, und wo man auch nicht sogleich sieht, wie jene sich in eine solche Form bringen lassen; wo hingegen zum Ersatz die gegenseitige Abhängigkeit der beobachteten Grössen (die natürlich auf irgend eine Weise gegeben sein muss) durch gewisse Bedingungsgleichungen gegeben ist, welchen die wahren Werthe von jenen, der Natur der Sache nach, nothwendig genau Genüge leisten müssen. Zwar sieht man bei näherer Betrachtung bald ein, dass dieser Fall von dem anderen nicht wesentlich, sondern bloss in der Form verschieden ist, und sich wirklich der Theorie nach leicht auf denselben zurückführen lässt: allein häufig bleibt dies doch ein unnatürlicher Umweg, der in der Anwendung viel beschwerlichere Rechnungen herbeiführt, als eine eigene der ursprünglichen Gestalt der Aufgabe besonders angemessene Auflösung. Diese ist daher der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung, und die Auflösung der Aufgabe, welche sie als ein selbständiges von der früheren Abhandlung unabhängiges

Ganze giebt, hat ihrerseits eine solche Geschmeidigkeit, dass es sogar in manchen Fällen vortheilhaft sein kann, sie selbst da anzuwenden, wo die bei der älteren Methode zu Grunde liegende Voraussetzung schon von selbst erfüllt war.

Die Hauptaufgabe stellt sich hier nun unter folgender Gestalt dar. Wenn von den Grössen v, v', v'' etc., zwischen welchen ein durch eine oder mehrere Bedingungsgleichungen gegebener Zusammenhang stattfindet, eine andere auf irgend eine Art abhängig ist, z. B. durch die Funktion u ausgedrückt werden kann, so wird eben dieselbe auch auf unendlich viele andere Arten aus jener bestimmt, oder durch unendlich viele andere Funktionen, statt u, ausgedrückt werden können, die aber natürlich alle einerlei Resultate geben, insofern die wahren Werthe von v, v', v'' etc., welche allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, substituirt werden. Hat man aber nur genäherte Werthe von v, v', v'' etc., wie sie Beobachtungen von beschränkter Genauigkeit immer nur liefern können, so können auch die daraus abgeleiteten Grössen auf keine absolute Richtigkeit Anspruch machen: die verschiedenen für u angewandten Funktionen werden, allgemein zu reden, ungleiche, aber was die Hauptsache ist, ungleich zuverlässige Resultate geben. Die Aufgabe ist nun, aus der unendlichen Mannigfaltigkeit von Funktionen, durch welche die unbekannte Grösse ausgedrückt werden kann, diejenige auszuwählen, bei deren Resultat die möglich kleinste Unzuverlässigkeit zu befürchten bleibt.

Die Abhandlung giebt eigentlich *zwei* Auflösungen dieser Aufgabe. Die erste Auflösung erreicht das Ziel auf dem kürzesten Wege, wenn wirklich nur *eine* unbekannte von den Beobachtungen auf eine vorgeschriebene Art abhängige Grösse abzuleiten ist. Allein die nähere Betrachtung dieser Auflösung führt zugleich auf das merkwürdige Theorem, dass man für die unbekannte Grösse genau denselben Werth, welcher aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen folgt, erhält, wenn man an die Beobachtungen gewisse nach bestimmten Regeln berechnete Veränderungen anbringt, und sie dann in irgend eine beliebige Funktion, welche die unbekannte Grösse ausdrückt, substituirt. Diese Veränderungen haben neben der Eigenschaft, dass sie allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, noch die, dass unter allen denkbaren Systemen, welche dasselbe thun, die Summe ihrer Quadrate (insofern die Beobachtungen als gleich zuverlässig vorausgesetzt wurden)

die möglich kleinste ist. Man sieht also, dass hierdurch zugleich eine neue Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wird, und dass diese von der Funktion u ganz unabhängige *Ausgleichung* der Beobachtungen eine zweite Auflösungsart abgiebt, die vor der ersten einen grossen Vorzug hat, wenn mehr als *eine* unbekannte Grösse aus den Beobachtungen auf die zweckmässigste Art abzuleiten ist: in der That werden die Beobachtungen dadurch zu *jeder* von ihnen zu machenden Anwendung fertig vorbereitet. Nur musste bei dieser zweiten Auflösung noch eine besondere Anleitung hinzukommen, den Grad der Genauigkeit, der bei jeder einzelnen Anwendung erreicht wird, zu bestimmen. Für dies alles enthält die Abhandlung vollständige und nach Möglichkeit einfache Vorschriften, die natürlich hier keines Auszuges fähig sind. Ebenso wenig können wir hier in Beziehung auf die, nach der Entwickelung der Hauptaufgaben, noch ausgeführten anderweitigen Untersuchungen, welche mit dem Gegenstande in innigem Zusammenhange stehen, uns in das Einzelne einlassen. Nur das eine merkwürdige Theorem führen wir hier an, dass die Vorschriften zur vollständigen Ausgleichung der Beobachtungen immer einerlei Resultat geben, sie mögen auf die ursprünglichen Beobachtungen selbst, oder auf die bereits einstweilen *unvollständig* ausgeglichenen Beobachtungen angewandt werden, insofern dieser Begriff in der in der Abhandlung näher bestimmten Bedeutung genommen wird, unter welcher, als specieller Fall, derjenige begriffen ist, wo mit den Beobachtungen schon eine zwar vorschriftsmässig ausgeführte, aber nur einen Theil der Bedingungsgleichungen berücksichtigende Ausgleichung vorgenommen war.

Den letzten Theil der Abhandlung machen ein paar mit Sorgfalt ausgearbeitete Beispiele der Anwendung der Methode aus, die theils von den geodätischen Messungen des Generals *von Krayenhoff*, theils von der vom Verfasser selbst im Königreich Hannover ausgeführten Triangulirung entlehnt sind, und die dazu dienen können, sowohl die Anwendung dieser Theorie mehr zu erläutern, als auch manche dergleichen Messungen betreffende Umstände überhaupt in ein helleres Licht zu stellen.

Die trigonometrischen Messungen gehören ganz besonders in das Feld, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet, und namentlich in derjenigen Form Anwendung findet, die in der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt ist. Gerade hier ist es

Regel, dass mehr beobachtet wird, als unumgänglich nöthig ist, und dass so die Messungen einander vielfältig controlliren. Nur durch die Benutzung der strengen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man von diesem Umstande den Vortheil ganz ziehen, der sich davon ziehen lässt, und den Resultaten die grösste Genauigkeit geben, deren sie fähig sind. Ausserdem aber geben jene Grundsätze zugleich das Mittel, die Genauigkeit der Messungen selbst, und die Zulässigkeit der darauf gegründeten Resultate zu bestimmen. Endlich dienen sie dazu, bei der Anordnung des Dreieckssystems, aus mehreren, unter denen man vielleicht die Wahl hat, das zweckmässigste auszuwählen. Und alles dieses nach festen sicheren Regeln, mit Ausschliessung aller Willkürlichkeiten. Allein sowohl die sichere Würdigung, als die vollkommenste Benutzung der Messungen ist nur dann möglich, wenn sie in reiner Autenthicität und Vollständigkeit vorliegen, und es wäre daher sehr zu wünschen, dass alle grösseren auf besondere Genauigkeit Anspruch machenden Messungen dieser Art immer mit aller nöthigen Ausführlichkeit bekannt gemacht werden möchten. Nur zu gewöhnlich ist das Gegentheil, wo nur Endresultate für die einzelnen gemessenen Winkel mitgetheilt werden. Wenn solche Endresultate nach richtigen Grundsätzen gebildet werden, indem man durchaus alle einzelnen Beobachtungsreihen, die nicht einen durchaus unstatthaften Fehler gewiss enthalten, dazu concurriren lässt, so ist der Nachtheil freilich lange nicht so gross, als wenn man etwa nur diejenigen Reihen beibehält, die am besten zu den nahe liegenden Prüfungsmitteln passen, welche die Summen der Winkel jedes Dreiecks und die Summen der Horizontalwinkel um jeden Punkt herum darbieten. Wo dies durchaus verwerfliche Verfahren angewandt ist, sei es aus Unbekanntschaft mit den wahren Grundsätzen einer richtigen Theorie, oder aus dem geheimen Wunsche, den Messungen das Ansehen grösserer Genauigkeit zu geben, geht der Maassstab zu einer gerechten Würdigung der Beobachtungen und der aus ihnen abzuleitenden Resultate verloren; die gewöhnliche Prüfung nach den Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken und bei den Punkten, wo die gemessenen Winkel den ganzen Horizont umfassen, scheint dann eine Genauigkeit der Messungen zu beweisen, von der sie vielleicht sehr weit entfernt sind, und wenn andere Prüfungsmittel, durch die Seitenverhältnisse in geschlossenen Polygonen oder durch Diagonalrichtungen, vorhanden sind, werden diese

die Gewissheit des Daseins von viel grösseren Fehlern verrathen. Umgekehrt aber, wenn die zuletzt erwähnte Voraussetzung stattfindet, und das Ausgleichen der Beobachtungen in Beziehung auf die Prüfungsmittel ohne die sicheren Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht ist, wo es immer ein Herumtappen im Dunkeln bleiben muss, und grössere, oft viel grössere, Correctionen herbeiführt, als nöthig sind, kann leicht dadurch ein *zu* ungünstiges Urtheil über die Messungen veranlasst werden. Diese Bemerkungen zeigen die Wichtigkeit sowohl einer hinlänglich ausführlichen Bekanntmachung, als einer auf strenge Principien gegründeten mathematischen Combination der geodätischen Messungen: sie gelten aber offenbar mehr oder weniger bei Beobachtungen jeder Art, astronomischen, physikalischen u. s. w., die sich auf das Quantitative beziehen, insofern die Mannigfaltigkeit der dabei stattfindenden Umstände zu wechselseitigen Controllen Mittel darbietet.

4.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1809, Junius 17.)

Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Auctore **Carolo Frid. Gauss**. Hamburgi, 1809. Sumtibus *Frid. Perthes* et *J. H. Besser*. XII S. Vorrede, 228 S. Text und 20 S. Tabellen nebst einer Kupfertafel. gr. Quart.

. . . .

Zu der schärferen Ausfeilung der Elemente eines Himmelskörpers hat man nicht die möglich kleinste Zahl von Beobachtungen, sondern so viele, als nur zu Gebote stehen, anzuwenden. Wie man sich dabei zu verhalten habe, lehrt der dritte Abschnitt. Hier war der Ort, die Haupt-Momente von einer für jede Anwendung der Mathematik auf die Körperwelt höchst wichtigen Frage zu entwickeln, wie Beobachtungen und Messungen, die bei der Unvollkommenheit unserer Sinne und Werkzeuge unvermeidlich immer mit Fehlern, wenn auch noch so geringen, behaftet sind, am zweckmässigsten zur Festsetzung von Resultaten zu combiniren sind. Die Grundsätze, welche hier ausgeführt werden, und welche von dem Verfasser schon seit 14 Jahren angewandt, und von demselben schon vor geraumer Zeit mehreren seiner astronomischen Freunde mitgetheilt waren, führen zu derjenigen Methode, welche auch *Legendre* in seinem Werke: *Nouvelles méthodes pour la déter-*

mination des orbites des comètes, vor einigen Jahren unter dem Namen *Méthode des moindres carrés* aufgestellt hat: die Begründung der Methode, welche von dem Verfasser gegeben wird, ist diesem ganz eigenthümlich. Eine weitere Ausführung hat man von demselben in der Folge zu erwarten.

. . . .

5.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1810, December 13.)

Am 25. November übergab Herr Prof. *Gauss* der Königl. Societät der Wissenschaften eine Vorlesung:

Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.

. . . .

Die Berechnung des vierten Systems von Elementen ist nach den Grundsätzen geführt, die in dem 3. Abschnitt des 2. Buches der *Theoria motus corporum coelestium* entwickelt sind, und die vorliegende Abhandlung giebt auch hierzu mehrere Zusätze, die hoffentlich den Astronomen nicht unwillkommen sein werden. Zuerst eine bequeme Berechnung der Differential-Aenderungen der heliocentrischen Länge und der geocentrischen Breite aus den Differential-Aenderungen der einzelnen Elemente. Sodann ein eigenes Verfahren, die unbekannten Grössen dem oben erwähnten Grundsatze gemäss zu bestimmen. Sind nämlich w, w', w'' etc. die vorgegebenen linearen Funktionen der unbekannten Grössen p, q, r etc., und soll das Aggregat $w^2 + w'^2 + w''^2 +$ etc. ein Kleinstes werden, so erhält man leicht so viele lineare Gleichungen, als unbekannte Grössen sind, aus denen diese durch Elimination bestimmt werden müssen. Diese Elimination ist aber, wenn die Anzahl der unbekannten Grössen etwas beträchtlich ist, eine äusserst beschwerliche Arbeit, und zwar deswegen, weil jede der Gleichungen alle unbekannten Grössen enthält. Herr Prof. *Gauss* hat diese Arbeit sehr bedeutend abgekürzt; denn obgleich er die Auflösung auch auf so viele lineare Gleichungen, als unbekannte Grössen sind, zurückführt, so sind diese Gleichungen so beschaffen, dass nur die erste alle unbekannten Grössen enthält, aber die zweite von p, die dritte von p und q, die vierte von p, q und r frei ist u. s. w., daher die Bestimmung der

unbekannten Grössen in der umgekehrten Ordnung nur noch wenige Mühe macht. Ausserdem hat diese Methode noch den Vortheil, dass man den kleinsten Werth von $w^2 + w'^2 + w''^2 +$ etc. im voraus angeben, und so die Vergleichung desselben mit dem nachher berechneten, wenn in w, w', w'' etc. die für die unbekannten Grössen gefundenen Werthe substituirt werden, zu einer Controlle der Rechnung benutzt werden kann.

Bemerkungen.

Zu S. 24 bis 27. Die nicht vorhandene Gleichungsnummer (6) fehlt auch in der Originalausgabe ebenso wie in dem Abdruck der *Theoria Combinationis* in *Gauss' Werken*, Band IV.

Zu S. 92. Obwohl eine deutsche Uebersetzung der *Theoria motus corporum coelestium* von *C. Haase* bereits seit 20 Jahren vorliegt, haben wir der Conformität wegen den aufgenommenen dritten Abschnitt des zweiten Buches nochmals übersetzt und darauf erst eine Vergleichung mit *Haase*'s Uebertragung vorgenommen.

Zu S. 99. Nach *Gauss' Werken*, Band VII, S. 288/289, findet sich bei Art. 176. die handschriftliche Aufzeichnung von *Gauss:*

> Hätten die Hypothesen H, H′ an sich (d. i. vor dem Eintreten von E oder vor erlangter Kenntniss von diesem Eintreten) ungleiche Wahrscheinlichkeiten μ, μ' gehabt, so wird man ihnen, nach der Erscheinung von E, Wahrscheinlichkeiten beilegen müssen, die den Produkten μh, $\mu' h'$ proportional sind.

Zu S. 102. In Bezug auf das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2}\, d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

macht *Gauss* in *v. Zach*'s *Monatlicher Correspondenz*, Band XXI, S. 280, folgende Bemerkung:

> Dass *Euler* schon das Theorem gefunden hat, woraus der schöne, von mir *Laplace* beigelegte Lehrsatz, sehr leicht abgeleitet werden kann, fiel mir selbst schon früher ein, als aber die Stelle, Art. 177., schon abgedruckt war; ich wollte es aber nicht unter die Errata setzen, weil *Laplace* wenigstens das obige Theorem doch erst in der dort gebrauchten Form aufgestellt hat.

Vergl. auch *Gauss' Werke*, Band VII, S. 280 und S. 289/290.

Zu S. 134, Zeile 3 v. o. Nach *Gauss' Werken*, Band IV, S. 144, findet sich neben dem Satz:

„Zwischen denselben Grenzen wollen wir allgemein den Werth des Integrals

$$\int \varphi(x) x^n \, dx$$

durch $K^{(n)}$ bezeichnen,

die handschriftliche Berichtigung:

Oder vielmehr, das Integral $\int \varphi(x) x^n \, dx$ zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = \infty$ soll durch $\frac{1}{2} K^{(n)}$ bezeichnet werden.

Zu S. 148. Die Chronometerbeobachtungen sind 1824 bei Gelegenheit der von der englischen Admiralität veranstalteten Expedition zur chronometrischen Bestimmung der Längenunterschiede zwischen Altona, Bremen, Helgoland und Greenwich ausgeführt worden. Näheres, auch in Betreff der Reduktion der von *Gauss* nicht berechneten Chronometer, siehe in den *Astronomischen Nachrichten*, Band V, S. 225.

Zu S. 166, Zeile 16 v. o. In der Originalausgabe des *Breitenunterschiedes u. s. w.* steht $-0{,}012''$ an Stelle von $+0{,}012''$. Die Nachrechnung hat aber die Richtigkeit des $+$ Zeichens ergeben, in Uebereinstimmung mit den Zahlenwerthen $3{,}75''$ (S. 164, Zeile 14 v. u.) und $3{,}76''$ (S. 166, Zeile 20 v. o.).

Ausserdem sind von uns, zumeist in Folge der fast überall durchgeführten Controll- oder Nachrechnungen, noch einige andere Druckfehler aufgedeckt worden, welche unmittelbar im Text verbessert sind.

Einige Abweichungen gegen die Originale haben wir uns nur insofern erlaubt, als veraltete Schreibweisen im Texte sowohl wie in den Formeln dem gegenwärtigen Gebrauche gemäss verändert sind, indem z. B. $\varphi(x)$ statt φx, x^2 statt xx u. s. w. gesetzt wurde.

Die Herausgeber.

